
V
B J
C
56292
I

# GEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH.

---

C Z Ę Ś Ć I.

---

*Cena oprawney w papier Zł. 3. Gr: 15.*

w Drukarni Nadworney J. K. Mci

Roku 1780.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J. P. Lhuilier Obywatela Genewenſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, które za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych roſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora Krakowſkiego Lektora J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki ięzyk z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. W Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy;
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Sekretarz W. L.
HYACYNT MAŁACHOWSKI Referen: Kor.
JGNACY POTOCKI Piſarz W. W. X. L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene. Ziem. Po.
JĘDRZEY MOKRONOSKI G. Ins. Woy. K.
STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI G. Lieut W. K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw. Or. Orła Bia.

## ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY KSIĘGI.



Przy-

*Przestroga.* w Tablicy XIX. Fig. 5. Litera A. tam być powinna, gdzie iest B. a Litera B tam, gdzie iest A.

ZBIOR

## ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych użytych w tey Kſiedze, z przydanemi obok ſłowami Łacińſkiemi toż ſamo w używaniu Matematyków znaczącemi.*

Bezśrednie *Immediatè*
Bok *Latus*
Cecha *Characteriſtica*
Celowniki *Dioptræ*
Cienciwa *Chorda*
Czworokąt *Quadrilaterum*
Dopełnienie *Complementum*
Doſtawa *Coſinus*
Doſieczna *Coſecans*
Doſtyczna *Cotangens*
Dowodzenie *Demonſtratio*
Foremny *Regularis*
Jlość *Quantitas*
Kąt *Angulus*
Kąt oſtry *Angulus acutus*
Kąt proſty *Angulus rectus*
Kąt roſtwarty *Angulus obtuſus*
Kąt wewnętrzny *Angulus internus*
Kąt zewnętrzny *Angulus externus*

Kąt

---

* *W niektórych mieyſcach, w wykładzie Słów Łacińſkich na ſwoyſkie nie trzymaliśmy ſię ſłownego tłumaczenia, ale mieliśmy wzgląd na wyraz i bliżſzy do dokładnego rzeczy wyſtawienia, i ſtoſownieyſzy do mowy Oyczyſtey.*

Kąt wyskakuiący *Angulus saliens*
Kątomierz *Graphometrum*
Kąty na przemian *Anguli alterni*
Kąty przyległe *Anguli adjacentes*
Kąty przeciwne w wierzchołku *Anguli ad verticem oppositi.*
Koło *Circulus*
Kołowy *Circularis*
Kwadrat *Quadratum*
Kwadrat ukośny *Rhombus*
Kwadrowanie *Quadratura*
Łuk *Arcus*
Następnik *Consequens*
Na odwrot, *albo* odwrotnie *Inversè albo* - *in ratione inversa*
Niespołmierny *Incommensurabilis*
Obwod *Perimeter*
Odcinek *Segmentum*
Odwrotny *Inversus.*
Okrąg *Circumferentia.*
Opisać *Inscribere*
Oś *Axis*
Ostrokątny *Acutangulum*
Pamiętnik *Memoriale*
Pierwiastek *Radix*
Piąciokąt *Pentagonum*
Pion *Perpendiculum*
Pionowy *Verticalis*
Podanie *Propositio*
Podstawa *Basis*
Podziałka *Scala*
Poprzednik *Antecedens*
Pośrednie *Mediatè*

Po-

Powierzchnia *Superficies*
Powietrznia *Atmosphera*
Poziemnie *Horizontaliter*
Poziomy *Horizontalis*
Prawidło *Alidada,* albo *Regula*
Promień *Radius*
Proſtokąt *Rectangulum*
Proſtokątny *Rectangulum* nap. Triangulum
Proſtokreślny *Rectilineus*
Proſtopadle *Perpendiculariter*
Proſtopadły *Perpendicularis*
Przeciwproſtkątna *Hypothenuſa*
Przedmiot *Obiectum*
Przekątna *Diagonalis*
Przenośnik *Transportator*
Przypuſzczenie *Suppoſitio*
Przyſtawanie *Convenientia*
Ramię kąta *Crus Anguli*
Roſprawa *Diſsertatio*
Roſtwartokątny *Obtusangulum*
Rownoboczny *Æquilaterum*
Rownoległobok *Parallelogrammum*
Ròwnoodległa *Parallela*
Ròwnoodległe *Parallele*
Równowaga *Libella*
Równoważenie *Libellatio*
Różnoboczny *Scalenum*
Rozwiązanie *Solutio*
Sieczna *Secans*
Skrayny *Extremus*
Spełnienie *Supplementum*
Spółmierny *Commenſurabilis*
Spółśrodkowy *Concentricus*
Srednica *Diameter*

Srodek *Centrum*
Stanowisko *Statio*
Stolik Geometryczny *Tabula Prœtoriana*
Stopień *Gradus*
Stosunek *Ratio*
Stosunek dwudzielny *Ratio subduplicata*
Stosunek dwumnożny *Ratio duplicata*
Stosunek składany *Ratio Composita*
Styczna *Tangens.*
Sześciokąt *Hexagonum*
Tosamość *Identitas*
Troykąt *Triangulum*
Twierdzenie *Theorema*
Twierdzenie przybrane *Lemma*
Ukośny *Obliquus*
Warunek *Conditio*
Wierzchołek *Vertex*
Wieszadło *Pendulum*
Wniosek *Corollarium*
Wpisać *Inscribere*
Wstawa *Sinus*
Wykładnik, *Exponens*
Wyprostowanie *Rectificatio*
Zasada *Principium*
Zagadnienie *Problema.*

OMYŁ-

# OMYŁKI DRUKU

| *Karta* | *Wierz* | *stoi* | *Popraw* |
|---|---|---|---|
| 33 | 1 | *potwierdzenie* | twierdzenie |
| 43 | 10 | *przypiſać* | *na boku Fig.* 5. |
| 43 | 27 | CHE | CAE |
| 44 | 4 | CBH | GBH. |
| 47 | 10 | | na boku *Figura* 2. |
| 76 | 3 | DEFC | BEFC. |
| 83 | 19 | $\frac{39 \times 81}{}$ | $\frac{39 \times 81}{2}$ |
| 86 | 5 | *Fig.* 7 | *Tab. VIII. Fig.* 1 |
| 87 | 1 | $26\frac{1}{6}$ | $25\frac{1}{6}$ |
| 92 | 17 | opuſzczaiąc | opuſzcza ſię |
| 95 | 22 | kończą | kończą ſię |
| 100 | 25 | *podzieloney* | podzielney |
| 105 | 5 | drugi | drugą ; |
| 111 | 19 | Lobo | Lubo |
| 111 | 27 | Kwadratow i | kwadratowy |
| 136 | 12 | | *na boku Fig.* 4. |
| 138 | 23 | FGHL | FGKL. |
| 139 | 1 | FGHL. | FGKL. |
| 143 | 12 | dziewiącią | dziewięciom |
| 144 | 5 | AB° | ABq |
| 144 | 10 | $_{2}$BC | 2BC |
| 144 | 11 | $_{2}$BC | 2BC, |
| 153 | 7 | Cyrculi | Circuli |
| 153 | 23 | punktem | punkt ten |
| 157 | 10 | ACB. | ACE. |
| 169 | 3 | $\frac{}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| 176 | 25 | więſzym | więkſzym |
| 180 | 12 | ſię | ſą |
| 183 | 9 | podzielone | podziału |
| 186 | 10 | ad | ab |

| *Karta* | *Wiersz* | *ſtoi* | *popraw* |
|---|---|---|---|
| 190 | 10 | y 5 | zmazać |
| | 13 | *Fig.* 4. | *Fig.* 5. |
| | 14 | *Fig.* 5. | *Fig.* 6. |
| 196 | 3 | Eigur | *Figur.* |
| 197 | 23 | trzeck | trzech |
| 200 | 26 | podanie | podania |
| 206 | 11 | BC. | BG. |
| 209 | 7 | to | a to |
| 213 | 8 | czyli | zmazać |
| 213 | 18 | dotkiniecia | dotknięcia |
| 213 | 19 | *poporowadźmy* | poprowadźmy |
| 213 | 23 | ADE | ADC. |
| 214 | 21 | Kwdrat | kwadrat. |
| 215 | 19 | *Przyſtoſowane* | Przyſtoſowanie |
| 219 | 1 | Niechy | Niechby. |
| 219 | 2 | iako | iak |
| 223 | 24 | pierwſzý | pierwſzey |
| 224 | 6 | ciągle | ciągło |
| 224 | 7 | ; | : |
| 249 | 24 | także | takie |
| 251 | 1 | byłbył | był. |
| 256 | 4 | kontów | Kątów |
| 257 | 27 | dwóm mnożnym | dwumnożnym |
| 259 | 1 | twierdzić | ztwierdzić |
| 267 | 23 | Troykąty | kąty |
| 268 | 1 | części | części równych |
| 268 | 15 | średnie | średnice |
| 268 | 20 | podziały | poddziały |
| 273 | 3 | (267) | (266) |

| *Karta* | *Wierz* | *ſtoi* | *popraw* |
|---|---|---|---|
| 276 | 5 | puktem | punktem |
| 277 | 16 | *miarà* | kończą |
| 280 | 1 | wkreślić | wykreślić |
| 281 | 15 | cerkłu | cerkla |
| 284 | 12 | Uważ | Uwaga |
| 286 | 5 | równey odległey, | równoodległey. |
| 286 | 8 | wſztkie | wſzyſtkie |
| 287 | 4 | założywſzy | zacząwſzy |
| 287 | 21 | wielkości | tey wielkości |
| 288 | 11 | rachuią | rachuiąc |
| 290 | 16 | Pryyſtoſowanie | Przyſtoſowanie |
| 291 | 1 | mierze | mierzę |
| 291 | 3 | ſzukſm | ſzukam |
| 292 | 17 | w iakim | w iakiey |
| 296 | 16 | ſkoczyła | ſkończyła |
| 298 | 22 | podſtwa | Podſtawa |
| 300 | 8 | niedoſtępnege | niedoſtępnego |
| 300 | 8 | doviść | doyść |
| 304 | 8 | na różnych | Kąty na rożnych |
| 318 | 13 | podziełoney | podzielney |
| 329 | 14 | Lo. 2,0301300 | Lo. 2--03010300 |
| 320 | 21 | Dopetn | Dopełn. |
| 323 | 20 | liczba | liczby |
| 325 | 11 | róznożoney | rozmnożoney. |
| 342 | 25 | 180 (A x B) — | 180 — (A+B) |
| 347 | 12 | Pr. | Pr: |
| 347 | 21 | 2,28330,12 | 2, 2833012 |
| 348 | 2 | ktorogo | którego |
| 348 | 3 | przeciwproſtokątna | przeciw-proſtkątna |
| 352 | 1 | w Tróykęcie | w Troykącie |

356.

| *Karta* | *Wiersz* | *ſtoi* | *popraw* |
|---|---|---|---|
| 356 | 2 | ſiecznych | ſiecznych, |
| 358 | 7 | Pr. - | - Pr : |
| 358 | 23 | AC - | AC² : |
| 360 | 1 | Przyſtoſawanie | Przyſtoſowanie |
| 360 | 7 | doyiść | doyść |
| 361 | 12 | Pr. - | - Pr : |
| 365 | 6 | 608 - | 608 = |
| 365 | 7 | ſtycz: 68. | ſtycz. 68 : |
| 367 | 7 | i AB | y AB |
| - | 8 | i BA - | y BA. |
| - | 9 | × AB - | x AB. |
| - | 14 | A i B - | A y B, |
| - | 17 | doyiść | doyść |
| 368 | 2 | y AB | i y AB. |
| - | 22 | Ax , | A x = |
| 369 | 4 | 13,1695856 | 13,0695856 |
| - | 6 | 3,4003669 | 3,3003669 |
| - | 19 | Ay × - | Ayx, |
| 370 | 13 | AxAy - | Ax;Ay. |
| 374 | 19 | 27767514 | 278675 14 |
| 376 | 11 | w Trykącie | w Tróykącie |
| 378 | 13 | tym | zatym |
| 379 | 1 | do ſtyczney | do Doſtyczney |
| 382 | 27 | odległości | odległość |
| 387 | 25 | zanarzędzia | narzędzia |
| 388 | 18 | prze | przez, |
| 391 | 10 | ſtyczna | ſtyczney |
| 391 | 22 | niia | liniia |
| 392 | 19 | naſtępuie | naſtępnie |
| 393 | 17 | tn | tu |
| 395 | 27 | punt | punkt |
| 400 | 23 | ita | ila |

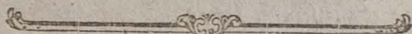
403

| *Karta* | *Wiersz* | *ſtoi* | *popraw* |
|---|---|---|---|
| 403 | 16 | póſtępuią | poſtępuiąc |
| 405 | 9 | pawierzchni | Powierzchni |
| 409 | 25 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{11}$ |
| 411 | 5 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{10}$ |
| 413 | 28 | .G | , g |
| 414 | 8 | powiarzchni | powierzchni |
| 416 | 29 | okrągowey | okrągowi |
| 417 | 7 | równiey | równie y |
| 426 | 18 | $\frac{161}{156}$ | $\frac{1}{1561}$ |
| 431 | 2 | tego łuku | łuku |
| 431 | 20 | Koła | łuku. |



# CZĘSC PIERWSZA

*O Liniach i powierzchowniach.*



## ROZDZIAŁ I.

*Wiadomości początkowe o Liniach proſtych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.*

1. Podrożny umieiący rachować kroki ſwoie, potrafi dochodzić iak długa była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniem i wprawą częſtą nauczony, oſądzi łatwo, ieżeli ſtrzelba iego do zamierzonego donieſie celu. Obadwa tak ſpoſobią ſię do pewnieyszego wyobrażenia ſobie długości i odległości, to ieſt: do porównania ich z temi, które iuż dobrze poznali i wyznaczyli. Krok ieſt taką dla po-

drożnego długością, a ſrednia ſtrzelby donośność, ſłuży myśliwemu do wymiaru inney odległości.

Te proſte, i inne, im podobne ſpoſoby wyobrażenia ſobie długości niewiadomych, użyteczne ſą w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba oſądzenia prędkiego, innych dokładnieyszych użyć nie pozwala. A ponieważ przez częſte ſpoſobow takich używanie, uczemy ſię chronić tych omyłek, w ktoreśmy w ſzczegulnych razach wpadać zwykli byli, nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących ſię, tyle iednak, ile to zgodzić ſię może z publiczną edukacyą.

Ale iakieyżekolwiek w tey mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częſte wprawiania ſię; chybiać wſzelako będą w porownywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprocz tego, każdy w ſzczegulności człowiek, używaiąc ſpoſobu wyżey wſpomnionego, rożneby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iedneyże nawet długości; a zatym trudnoby ludzie iedni z drugiemi zrozumieć ſię w tey mierze mogli, gdyby pierwszego tego w wyznaczaniu długości ſpoſobu trzymąli ſię.

2.

2. Z tey pobudki udano ſię do uſtanowienia umówioney pewney długości, którą na ſamo weyrzenie, dokładnie ſobie wyobrazić można było. Do tey ſtoſowano wſzyſtkie inne długości niewiadome, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowa nazwana ieſt *Miarą*.

3. W iednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła być używana, według różnych okoliczności, które do iey użycia zdarzaią ſię. W Polszcze na przykład kupieckie niektóre towary, i pomnieysze na ziemi długości, łokciem, podzielonym na cale i liniie mierzyć ſię zwykły. Gdy zaś znacznieyszą iaką długość wymierzać na ziemi trzeba, używamy do tego ſążnia z trzech łokci złożonego, albo prętu zawieraiącego 7.½ łokci, a ieſzcze lepiey ſznura, który 10. prętow zamyka.

Ponieważ te oſtatnie miary nic nie ſą innego, tylko łokieć kilka razy przydany, doſyć więc będzie wielkości łokcia dokładne ſobie wyobrażenie uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miar większych od łokcia. Wszyſtkie te ſłowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko ſłowami próżnemi y bez zrozumienia, gdy-

byśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, iedney z tych miary, na przykład łokcia; bo wszyſtkie nasze wyobrażenia, które o wielkościach mamy, ſą tylko *względnemi* (relativæ) iedne do drugich.

4. Kraie różne odmiennych też miar zażywaią; a co ieſzcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te, lubo odmienne, iednymże ſłowem często ſię wyrażaią. (a) I tak łokieć Litewſki ieſt $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnego; a zatym i inne Litewſkie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miar Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie ieſt od Polſkiego większy. Mila Niemiecka, zawiera prawie $1\frac{2}{3}$ mili Francuzkiey; a mila Angielſka trzecią tylko ieſt Francuzkiey mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5.

(a) *Matematycy z wielką uſilnością ſzukali miary iednoſtayney, do którey możnaby było ſtoſować wſzyſtkie inne. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości* Wieszadła proſtego (*Pendulum ſimplex*) *uſtawionego w mieyſcu wolnym od zawad, i na powietrzu pomiarkowanym; ale ta materya należy do Fizyki.*

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na ſamę tylko wzgląd miało ſię *długość*, wielkości tych, któreśmy uważali. W takowym razie mówić ſię zwykło, że ſię ſamemi Liniiami zaprzątamy, a w ſzczególności Liniiami *proſtemi*; gdy te wyznaczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednego ich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże ſamych Liniiach baczył kto ſzczególniey to mieyſce, gdzie ſię liniia zaczyna, albo gdzie ſię kończy; lub gdzie iedna drugą przecina, wtedy mówiłoby ſię, że ſię zaprząta około *Punktu*.(b)

6. Przez ieden punkt można tyle Linii rzeczą ſamą, albo przynaymniey myślą poprowadzić, ile kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieſzcze, w iakieykolwiek od pierwszego odległości, będzie wyznaczony, przez który Linia proſta ma przechodzić, w tym razie położenie teyże Linii

---

(b) *Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za ſzczere obiaśnienia i wytłuſzczenia wyobrażeń, które do tych ſłów zwykliśmy przywięzywać. Im więcey kto zaſtanawia ſię nad początkami, na których zaſadzaią ſię nasze wiadomości, tym większą poſtrzega trudność w ich wyłożeniu.*

nii, iuż ſię wyznacza; albo co na iedno wychodzi; wſzyſtkie Liniie proſte, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą ſamą Liniią. A zatym, gdy dwie Liniie proſte ſchodzą ſię, lub przecinaią, nie mogą tylko Punkt ieden mieć ſpolny. Gdy ſię mówić będzie w ſzczególności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką oſtrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość ieſt wielka.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią proſtą, używamy narzędzia, które ſię nazywa *Liniałem* (Regula) nieſpuſzczaiąc ſię na ſamą rękę y oko; i przyſtawiwſzy ten Liniał do dwoch wyznaczonych Punktow, kreślemy piorem, lub ołowkiem Liniią podaną.

Oprocz wymiaru Linii proſtych, przypada częſto zatrudniać ſię położeniem ich, iednych względem drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt ſpolny, mogą być do ſiebie nachylone rozmaitemi ſpoſobami. Abyśmy tę wielość położeń ich, iednych względem drugich dobrze poieli; wyſtawmy ſobie Linią iednę proſtą na ſtole na przykład wyrytą, i dru-

gą

gą na niey nayprzod położoną, i zupełnie do niey przyſtaiącą, a potym obracaiącą ſię około Punktu wyznaczonego, któryby tym obydwom Liniiom był ſpolny, W takowym obracaniu ſię, druga Linia odmienne coraz położenia i nachylenia mieć będzie względem pierwszey. Te rozmaite nachylenia nazywaią ſię *Kątami* (Anguli) Punkt, około którego ta druga Liniia obracała ſię, nazywa ſię *Wierzchołkiem kąta.* (Vertex Anguli) Liniie, które nachyleniem ſwoim ten kąt czynią, nazwać można *Ramionami* (po łacinie zowią takowe Liniie *Crura.*) Pod czas obracania ſię tey Linii, Punkt ktorykolwiek w niey naznaczony, w iednakiey zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którego ſtatecznie ſię Linia obraca; a zatym i wſzyſtkie Punkta śladu od niey zoſtawionego, iednakowo będą odległe od tego Punktu nie wzruſzonego. Jeżeli obracaiąca ſię Linia zupełny obrot uczyni, że znowu do pierwszego położenia, zkąd ſię obracać zaczeła, powróci; ślad taki od tegoż ſamego Punktu zoſtawiony, nazywa ſię *Okrągiem koła*, (Circumferentia Circuli) Właſność Okrągu ztąd wypływaiąca, ieſt ta: że każdy w nim znayduiący ſię Punkt, w równey od iednego Punktu zoſtaie odległości; a ten Punkt nazywa ſię *Srodkiem.* (Centrum) Odległość

ſrodka

ſrodka od któregokolwiek Punktu Okrągu, nazywa ſię *Promieniem.* (Radius) Część Okrągu, nazywa ſię *Łukiem.* (Arcus) a Linia proſta łącząca końce dwa Łuku, nazwać ſię może *Cienciwą.* (Chorda) Gdy Cienciwa ta przechodzi przez ſrodek Okrągu, a zatym dwa razy większa ieſt od promienia, zwać ią będziemy *Srednicą;* (Diameter) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równe części, które tym tylko różnią ſię; że iedna z iedney, a druga z drugiey ſtrony Srednicy ieſt położona. (c)

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznym działaniem tego, co wyrażaią) poydźmy do wyłożenia początku kątow, z którego pochodzą.

Jeżeliby Linia ruchoma, odprawiła obrotem ſwoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. tey całey drogi, którą iey obeyść trzeba było, aby do pierwszego ſwego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek tey Linii, odprawił tym ſamym połowę, trzecią część, czwartą, piątą okrągu zupełnego, któryby

(c) *Chcąc na papierze nakreślić Okrąg koła, którego ſrodek y promień mamy wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazwanego poſpolicie* Cerklem (*Circinus*)

by ta linia zrobiła wkoło ſię obrociwszy. Zkąd wynika, że wierzchołek kąta obrawszy za ſrodek, i od niego iakimkolwiek promieniem łuk nakreśliwszy, któryby między ramionami kąta zamykał ſię, wielkość tego łuku koła względem całego okręgu, do którego należy, da nam poznać wielkość kąta, względem całego tego mieyſca kątowego (Angularis) któreby iedna z tych dwoch linii przeszła, zaczynaiąc ſię obracać wtedy, gdy na drugiey leżała, a niekończąc ſię obracać, aż znowu do niey przyſtanie. I przeto łuk ten nazwany ieſt Miarą (d) kąta między dwoma ramionami zamkniętego, a zatym tak łuk ten, iako i kąt, iednakowo ſię powiększaią, albo zmnieyſzaią, to ieſt: ſtaią ſię razem podwoynemi, potroynemi i t. d.



(d) *Ten wyraz* Miara *nie kładzie ſię tu w ściſłym rozumieniu; miara albowiem iakiey ilości właściwie wzięta, powinna być tego gatunku, którego ieſt ta ilość, która ſię mierzy; na przykład długość iedna, mierzy ſię przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, ſą gatunku różnego, a zatym łuk koła miarą kąta właściwie wziętą być nie może.*

10. Ztąd ſię okazuie: że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawiſła. ( uwaga to ieſt, nad ktorą dobrze zaſtanowić ſię potrzeba.)

11. Aby ſpoſobem wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętego; ktorego promień ieſt dany ; zgodzono ſię na podzielenie okręgu iakiegożkolwiek na 360. części rownych, z których każda nazywa ſię *Stopniem* (Gradus.) Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w ſobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. ſtopniow. (e) Na tym gruncie zaſadza ſię cała robota i używanie narzędziow zdatnych do mierzenia kątow na zie-



(e) *W działaniach większey dokładności wyciągaiących, dzielą ieszcze każdy ſtopień na 60. części nazwanych* Minutami, *a każdą minutę na* 60. minut drugich (*Minuta ſecunda* albo iednym ſłowem: *ſecunda.*)

*Znak ſtopniow, ieſt:* o *nad liczbą ſtopniow napiſane.*

*Tak nap:* $20^{\circ}$, $21^{\circ}$, $30^{\circ}$, $31^{\circ}$, *i t. d. wymawia ſię: dwadzieścia, dwadzieścia ieden i t. d. ſtopniow.*

mi, i ſpoſob robienia tychże kątow na papierze, któreby iakążkolwiek ſtopniow podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potym będziemy.*

Dla uniknienia długości, którąby obſzerne każdego działania wykładanie za ſobą pociągało, i aby natężeniu myśli poſolgować, zgodzili ſię Matematycy na pewne nazwiſka Punktow, Liniow, Kątow i t. d. około których maią doczynienia.

12. Punkt oznaczaią przez iednę tylko literę, np: A.B.C.D. i t. d. gdy położenie tego punktu ieſt wiadome; a np: przez x, y, z, gdy nie wiedzą ale dopiero ſzukaią iego położenia.

Do oznaczenia Linii używaią liter, które na dwoch iey końcach kładą, ieżeli ieſt wielkości ograniczoney; ieżeli zaś w wielkości ſwoiey nie ieſt ograniczona, tedy na niey dwa punkta ſtanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ią mianuią. Tak nap: Linia łącząca dwa punkta A i B oznaczona byłaby temi dwiema złączonemi literami AB. *Tab. I. Fig. 1*

Dla oznaczenia kąta (ponieważ ten czynią dwie linie do ſiebie ſię nachylaiące)

kładą

kładą trzy litery iednę przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta; a złączywszy ie razem, i w ſrodku ich położywszy literę nad wierzchołkiem kąta napiſaną, trzema temi literami kąt wyrażaią. Tak nap: kąt zro-
Fig. 2. biony przez dwie linie CA,CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazem: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcey iak do iednego kąta, doſyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która ieſt nad wierzchołkiem iego.

13. Kiedy ramie ruchome przez obrot ſwoy, którym początek kątow obiaśniliśmy,
Fig. 3. uchodzi tylko czwartą część całego okrągu; zrobi takim obrotem ſwoim dwa kąty rowne z tą Linią, około ktorey ſię obraca, gdy tę drugą daley pociągniemy. Te kąty nazywaią ſię *Proſtemi* (Anguli recti) łuk koła, który im za miarę ſłuży, będzie miał w ſobie 90. ſtopni, ſama zaś linia ruchoma, będzie w ten czas *Proſtopadłą* (Perpendicularis) względem drugiey. (Obacz w pierwſzey części Arytmetyki na karcie 87.)

Gdy to ſamo ramie ruchome obrotem ſwoim nie dochodzi czwartey części okrągu, wtedy kąty między nim i drugim ramieniem przedłużonym uczynione, bę-

dą

dą nie rowne. Jeden mnieyszy będzie od proſtego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwane ſą *Przyległemi* (Adjacentes) albo (deinceps poſiti.) Mnieyszy od proſtego zowie ſię *Oſtrym* (*acutus*) większy zaś od proſtego, *Roztwartym* (obtuſus) a iedna z tych linia nazywa ſię *Pochyłą* (obliqua) do drugiey. Kąty DCA. DCB. ſą nierówne; kąt DCB. ieſt oſtry, a kąt DCA. Roztwarty, Linia DC. pochyła do Linii AB. *Fig.* 4.

14. *Summa dwoch kątow przyległych, równa ſię dwom kątom proſtym.*

Niech będzie DC. pochyła do AB. ſumma kątow: DCB. DCA. równa ieſt dwom kątom proſtym.

Jakož, gdyby Linia DC, zrobiwszy obrotem ſwoim około Punktu C. kąt BCD, daley ſię ieſzcze obracała, ażby naoſtatek przyſtała do linii CA, byłaby obrotem; takim przeſzła dwa kąty proſte; ale też razem byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty ſą dwiema częściami ſummy z dwoch kątow proſtych złożoney, a zatym rownaią ſię dwom kątom proſtym.

15. Gdyby Linia CD. była pociągniona na drugą ſtronę linii AB, naprzykład aż

do

do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby ſię, ieden względem drugiego *Przeciwległemi w wierzchołku* (ad Verticem oppoſiti) maią one wierzchołek C, ſpolny; a ramiona CA, CE, iednego z tych kątow, ſą przedłużeniem ramion CB, DC, drugiego.

16. *Kąty w wierzchołku przeciwległe ſą rowne.*

Jakož w ſamey rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą być uważane, iak gdyby ſię zrobiły z obracania ſię linii ED, około Punktu niewzruſzonego C, zaczynaiąc ten obrot, gdy Linia ED. na linii AB. leżała, aż do położenia iey na CE. Tym ſpoſobem linia ED. przez taki ſwoy obrot nachyli ſię do linii AB, równie z iedney iak i z drugiey ſtrony, a zatym czyni rowne kąty DCB, ECA.

Wſzyſtkie te *Podania* (Propoſitiones) ktoreśmy dotąd przytoczyli, powinny być obiaśnione, wykonywaiąc ie, przez działania ręczne, na ktorych ſię zaſadzaią. (f)

ROZ-

(f) *Niech ſię nieobawiaią Nauczyciele żadnych zarzutow, gdy przez ruch linii tłomaczyć i obiaśniać będą wiele prawd Geometrycznych Uczniom ſwoim dopie-*

# ROZDZIAŁ II.

## *O przyſtawaniu Troykątow, z przyſtoſowaniem do rozwiązania wielu Zagadnień.*

17. *Definicye*: Mieyſce zakończone trzema liniami proſtemi, zowie ſię *Troykątem proſtokreślnym* (Triangulum rectilineum.) My ſamego przez ſię ſłowa *Troykąt* używać będziemy. Linie trzy, w których ſię *Troykąt* zamyka, zowiemy *Bokami* Troykąta (Latera Trianguli.) Takie linie zowią także *ścianami*. Tego nazwiſka do innego potym znaczenia użyiemy. *Przyſtawanie*, Convenientia) i przypadanie Figur iednych do drugich, na którym równość dwóch iakich Powierzchni zakła-

*ro poczynaiącym. Dalecy oni ſą ieſzcze, aby w tey materyi domyślać ſię mieli ſubtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działania około tych rzeczy, któremi ſię zatrudniać maią, i zmyſły ich na nie obracać, ieſt to ieden z nayſkuteczniey ſzych ſpoſobow, baczność w nich i uwagę do rzeczy przywiązać, a razem i natężeniu myśli poſolgować.*

zakładamy, używane ieſt częſto w poſpolitych życia ludzkiego potrzebach i wygodach. Na obicie naprzykład pokoiow, bierzemy tyle płotna, lub inney iakiey materyi, ile wyſtarcza na przykrykrycie ścian iego; i wielkość powierzchni tego obicia, nie rożni ſię od ścian powierzchni, które pokrywa tylko tym, że ściany ſą pod obiciem, a obicie na ścianach. Toż mówić o deſkach wyſtarczaiących na podłogę, albo o ſzybach do okien i t. d. Krawcy o to ſię ſtaraią, aby tak ſuknie lub inne odzienia wymierzali, żeby te przyſtawały iak naylepiey do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie kſięgi iednakowego dzieła, dwa obrazy pod iednakowemi wymiarami odmalowane, nie różnią ſię co do powierzchni, tylko tym, że nie ſą iedną rzeczą, ale dwiema. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak ſię zgadzaią z ſobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnego, napełnia korzec ieden, iako i drugi; tyle w ieden garniec, co i w drugi mieści ſię napoiu i t. d. gdy te miary ſtoſuią ſię do iedney uſtanowioney od Zwierzchności.

18. *Twierdzenie* (Theorema). Jeżeli w dwoch Troykątach, dwa boki w iednym, równe ſą dwom bokom w drugim, i kąty między temi bokami zawarte równe, trze-

ci

ci też bok iednego, równy będzie trzeciemu bokowi drugiego, i kąty przy tych bokach równych będące, w iednym i w drugim Troykącie będą równe.

Niech będą dwa Troykąty: ABC, abc, Fig. 5.
których boki: AC, ac, są równe, boki też BC, bc, równe i kąty: C, i c, równe. Dowieść trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako też B, i b, będą równe.

*Dowodzenie* (Demonstratio.) Wystawmy sobie Troykąt: abc, iakoby oderwany (co też odstrzygszy go, i w rzeczy samey wykonać można) i przeniesiony na Troykąt: ABC. w ten sposob; aby położywszy linią ca, na linii CA; linia też cb, przystała do linii CB, (co dla równości kątow C, i c, nastąpić powinno) Ponieważ linia ca, rowna iest linii CA; a linia cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A, i B; a zatym i linie ab, i AB, będą przez te same punkta zakończone. Więc te dwie ostatnie liniie przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatym będą równe; i zrobią z liniami ca, CA,cb,CB, kąty równe a, i A, iako też b, i B.

19. *Uwaga.* Dwa Troykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to,

że odmienne mieyſce zaſtępuią. O takich więc dwóch Troykątach, a w powſzechności i o każdych dwoch Figurach, ſamym tylko położeniem mieyſca różniących ſię mówiemy, że do ſiebie *przyſtawać mogą.*

20. *Przyſtosowanie: Jeżeli w iednym Troykącie, dwa boki ſą równe, będą też równe i dwa kąty przy nich leżące.*

Fig. 6. Niech będzie Troykąt ABC, którego boki AC, BC, ſą równe; kąty też A i B, będą równe.

Wyſtawmy ſobie, że ten Troykąt ABC, wybity ieſt na drugim mieyſcu tak, żeby bok CA, w wybitym Troykącie, to miał położenie, co bok CB, w Troykącie pierwſzym, a znowu bok CB, aby w drugim, na tey ſtronie leżał, na którey bok CA, w pierwszym; ponieważ kąt C. ieſt iednakowy w obydwóch tych Troykątach, położywszy tedy drugi Troykąt na pierwszym; bok CB, i CA, Troykąta wybitego przyſtanie zupełnie pierwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Troykąta pierwszego, a zatym i Punkta B, i A, należące do Troykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do pierwszego Troykąta. Więc drugi Troykąt

kąt przenieſiony na pierwszy będźie mógł przyſtać do niego; a przeto kąty B i A, tego Troykąta równe będą, pierwszy kątowi A, drugi kątowi B, Troykąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym Troykącie, ieſt równy także kątowi A drugiego Troykąta, więc kąty A i B, Troykąta podłożonego ſą równe kątowi A. w Troykącie na nim położonym, a zatym kąty A i B, ſą ſobie równe.

Naſtępuiące tegoż twierdzenia dowodzenie, zaſtanawia prawie wſzyſtkich poczynaiących; i wielu ieſt zdania, lubo częſto zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie ſię poznawać poiętność Ucznia i ſpoſobność do Geometryi.

Niech będzie Troykąt CAB, którego boki CB, ſą równe; kąty CAB, CBA, będą też równe. *Fig. 7.*

*Przygotowanie.* Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek liniie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

*Dowodzenie.* Ponieważ liniie CA, CB, ſą równe; a liniie też AD, BE, wzięte ſą równe; więc w Troykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C ieſt ſpólny; ramiona

 CB,

CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równe będą ; a zatym te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie mogą; (18) a w ſzczegulności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, równe będą.

W Troykątach: ADB,BEA, boki AD, BE, ſą równe, dowiodło ſię też, że liniie BD, AE, ſą także równe, i że równe ſą kąty w tych ramionach zawarte przy D. i E; więc te Troykąty mogą do ſiebie przyſtać; a w ſzczegulności kąty: DAB, EBA, ſą ròwne, a zatym i im przyległe: CAB, CBA. będą równe.

21. Gdyby wſzyſtkie trzy boki w Troykącie były równe, trzy także kąty w nim równe byłyby.

22. *Definicye.* Gdy w Troykącie dwa boki ſą równe, taki Troykąt zowiemy *Równoramiennym* (Jsosceles albo Æquicrurum.) Gdy w Troykącie boki trzy będą równe, nazwiemy go *Równobocznym* (æquilaterum,)

Gdy w Troykącie wſzyſtkie trzy boki nierówne będą, zwać go będziemy: *Rożnobocznym* ( Scalenum.)

23. *Twierdzenie* 2. Gdy dwa Troykąty, maią bok ieden równy, i gdy dwa

kąty

kąty przy tym boku iednego troykąta. równe są względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Troykąta; trzeci też kąt w iednym Troykącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względem siebie będą w obydwóch tych Troykątach.

Niechay naprzykład w dwóch Troykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki: AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. *Fig.* 5.

*Dowodzenie.* Wystawmy sobie Troykąt abc, przeniesiony na Troykąt ABC; i na nim położony, tak, aby Punkt *a.* postawiwszy na Punkcie A, liniia ab, równa linii AB, na niey leżała. Ponieważ kąt *a.* równa się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; linia też *ac*, przystanie do linii AC; a liniia bc, do BC; Punkt tedy *c*, musi się znaydować razem i na linii AC. i na linii BC, a zatym znaydować się będzie na ich spólnym przecięciu C. Więc Troykąt abc, zupełnie przystanie do Troykąta ABC, a przeto linie ac i bc, równe będą liniiom AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystosowanie.* Jeżeli w Troykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równe, taki Troykąt będzie *Równoramien-*

*ramiennym.* Dowodzenie tego podobne ieſt wcale dowodzeniu położonemu w przyſtosowaniu pierwszego Twierdzenia (20.) Jeżeli Troykąt ma wszyſtkie trzy kąty równe, będzie Równobocznym.

25. *Twierdzenie* 3. Gdy w dwóch Troykątach, boki trzy iednego, równe ſą trzem bokom drugiego; i kąty też trzy w iednym, będą równe trzem kątom w drugim, a te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

*Tab. II. Fig.* 1. *i* 2. Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, takie, aby bok AB, w pierwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokom ac, bc, te dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

*Dowodzenie.* Wyſtawmy ſobie Troykąt abc, przenieſiony i położony pod Troykątem ABC, tak, iak go wyraża na figurze Troykąt ABD. Poprowadźmy linią CD. Ponieważ liniie CB, BD, ſą obiedwie równe linii cb, ſą też iſobie równe; więc i kąty: BCD, BDC, ſą równe (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, ſą także równe; a zatym i kąty: ACB, ADB, równe będą.

Więc dwa Troykąty: ACB, ADB, mogą przyſtać do ſiebie. Ale że też Troy-

ką-

kąty: ABD, i abc przyſtać do ſiebie mogą; więc przyſtaną także i Troykąty: ABC, abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może być troiakie, bo może albo przecinać linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenie teyże linii AB. Dowodzenie toż ſamo ieſt we wſzyſtkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Maiąc dane dwa Punkta, znaleść trzeci, któryby od każdego z tamtych, w iednakowey był odległości.

*Rozwiązanie* (Solutio.) Od iednego i od drugiego z punktow danych, poprowadziwszy łuk koła promieniem większym od odległości tych dwóch Punktow; tam gdzie ſię te dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którego ſzukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zaſadza ſię *Wykreślenie* Geometryczne wielu innych Zagadnień, Wykreślenie to zowią po łacinie: *Conſtructio*, lubo tego ſamego ſłowa zażywaią także Matematycy na oznaczenie przygotowania poprzedzaiącego dowodzenie

dzenie, przez kreślenie pewnych linii potrzebnych do tegoż dowodzenia. My przykładem ich, w obydwóch także razach, używać będziemy tego słow: *Wykreślenie.*

29. *Zagadnienie 2.* Daną linią prostą, podzielić na dwie części równe.

*Rozwiązanie.* Sposobem w poprzedzającym Zagadnieniu wyrażonym, znaydźmy po obydwóch linii tey stronach dwa punkta, któreby od końców iey iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta linią prostą, ta przetnie w iednym punkcie linią daną, i w tym przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Fig. 3. Niech będzie linia dana AB, C Punkt równo odległy od A i B, końców linii daney; D. drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie linia CD, przecina linią AB, dzielić będzie na dwie równe części linią daną.

*Wykreślenie,* (Constructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

*Dowodzenie.* Troykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równe iedne drugim; a zatym (25.) mogą przystać do siebie; a

w szcze-

w szczegulności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Troykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, spólny; i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa Troykąty mogą do siebie przystać, i linie AX. i BX. są równe.

30. *Defin:* Gdy w Troykącie, albo w iakieykolwiek inney figurze, bok ieden będzie przedłużony; kąt, który się między tym przedłużeniem i bokiem przyległym zrobi; nazywa się *Zewnętrznym* (externus) tego Troykąta, lub inney figury.

31. *Twierdzenie* 4. W Troykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Troykąt ABC, którego bok AB. przedłużony iest według upodobania ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C. *Fig.* 4.

*Przygotowanie.* Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowadźmy linią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniymy ieszcze i linią BF.

*Dowo-*

*Dowodzenie.* Troykątow: AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, ſą równe, i ramiona tychże kątow równe, z wykreślenia. Więc dwa te Troykąty, mogą do ſiebie przyſtać (18.) a w ſzczególności kąt C. równy ieſt kątowi EBF; który kąt EBF, ieſt tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy ieſt od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątow w Troykącie, mnieysza ieſt od dwóch kątow proſtych. Ponieważ albowiem kąt CBD, większy ieſt od kąta C, Summa kątow CBD, ABC, większa będzie od Summy kątow C. i ABC; a że ſumma dwóch kątow pierwszych, waży tyle, co dwa kąty proſte, bo ieſt ſummą dwóch kątow przyległych (14.) więc ta druga ſumma mnieysza ieſt od pierwszey.

Idzie zatym, że ieżeli w Troykącie, będzie kąt ieden proſty, albo też roztwarty, dwa inne, nie mogą być, tylko każdy z nich oſtry.

33. *Definicye.* Jeżeli Troykąt zawiera w ſobie kąt proſty, zowie ſię *Proſtokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwarto-*

*kątnym*

*kątnym* (Obtuſangulum.) Jeżeli wszyſtkie trzy kąty ma oſtre, zwać ſię będzie *Oſtrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzenie* 5. Gdy w dwóch Troykątach, bok iednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokom przyległy równy ieden drugiemu, a kąt nie przyległy tym bokom, także równy w obydwóch Troykątach; dwa te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, maiące dwa boki AB, ab, równe, kąty A i a, przy tych bokach równe, i kąty C, i c, równe. Te dwa Troykąty mogą do ſiebie przyſtać. *Fig.* 5.

*Dowodzenie.* Przenieśmy Troykąt abc, na Troykąt ABC, tak, aby bok ab, przyſtawszy do boku AB, bok też ac, przyſtawał do boku AC; (co dla równości kątow a, i A, naſtąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C, naprzykład na d, albo daley za punktem C, na linii AC, przedłużoney, naprzykład na D; w pierwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Troykąta CBd, a zatym większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrny Troykąta CBD,

CBD, a zatym większy od kąta D. albo c; co w obydwóch razach, ieſt przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dane, ſą równe. Więc linia ac, przenieſiona na AC, nie gdzie indziey kończyć ſię będzie, iak na punkcie C, a zatym Troykąty BAC, bac, mogą przyſtać do ſiebie. (18.)

35. *Twierdzenie* 6. W każdym Troykącie, ieżeli bok ieden większy ieſt od drugiego; i kąt też na przeciwko boku pierwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwnego.

*Fig.* 5. Niech będzie Troykąt ABC, którego bok AC, większy od boku BC; będzie też i kąt ABC, większy od kąta A.

*Przygotowanie.* Na boku AC, więkſzym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

*Dowodzenie.* Troykąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB, równe; kąt CDB ieſt zewnętrzny Troykąta BAD; więc ieſt większy niżeli kąt A; a zatym i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopieroż kąt CBA większy ieſt od tegoż kąta A.

36. *Twierdzenie* 7. Gdy w Troykącie, większy ieſt kąt ieden od drugiego;

bok

bok naprzeciwko pierwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

*Dowodzenie.* Gdyby bok przeciwny pierwszemu kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiemu kątowi przeciwnego, pierwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mnieyszy (35.) Ale przez podanie, ten pierwszy kąt nie ieſt ani równy, ani mnieyszy od drugiego, więc też i bok temu pierwszemu kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwaga.* W tym twierdzeniu użyliśmy pierwszy raz dowodzenia *zbocznego*, albo *przez niepodobność.* Po łacinie piszący, nazywaią takie dowodzenie: *Demonſtratio indirecta*, albo *per abſurdum.* Okazuie ſię tym ſpoſobem, że wszelkie inne odmienne w tey mierze twierdzenie, byłoby fałszywym; a zatym to tylko ieſt prawdziwe, którego dowodziemy.

38. *Wnioſki.* Ponieważ w Troykącie proſtokątnym i w Tròykącie roztwartokątnym, kąt proſty, i kąt roztwarty, ſą z trzech kątow naywiększemi; przeto też boki naprzeciwko takich kątow leżące, będą naywiększe. A ztąd

A ztąd między wszyftkiemi liniiami poprowadzonemi od tegoż famego punktu, od iedney linii, naymnieysza ieft linia proftopadła. Inne linie pochyłe, tym większe będą, im dalsze od proftopadłey. Dwie także linie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż famego poprowadzić można; a nie więcey, i te od proftopadłey równie będą odległe.

Ztąd też wypływa, że linia profta, nie może przecinać okrągu koła w więcey, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od frodka koła, równa fię promieniowi tegoż koła; bo inaczey więcey niż dwie linie równe, możnaby poprowadzić od iakiego punktu do trzeciey linii.

39. *Defin:* Linia proftopadła, fpufzczona od iakiego punktu na inną linią, nazywa fię *odległością* tego punktu od linii, na którą fpada; a to dla tego, że ta linia ieft naykrótszą między wszyftkiemi innemi, któreby od tegoż punktu można poprowadzić do tey famey linii.

40. *Twierdzenie* 8. W Troykącie fumma dwóch boków, większa ieft od boku trzeciego.

Niech

Niech będzie Troykąt ABC; Summa dwóch bokow AB, BC, większa iest od boku AC. Fig. 7.

*Wykreślenie.* Pociągnąwszy daley bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce linią CD.

*Dowodzenie.* w Troykącie równoramiennym BCD, kąty C i D, są równe; więc w Troykącie ACD, kąt ACD, większy iest od kąta D; a zatym i bok AD, większy będzie od boku AC; a że AD równa się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków większa iest od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenie służyć nam może po części za obiaśnienie w tym, które iuż mamy naturalnym linii prostey wyobrażeniu. Widziemy tu oczywiście, że linia prosta, która łączy dwa Punkta, mnieysza iest, niżeli summa dwóch innych linii do tychże Punktow poprowadzonych od punktu takiego, który się nieznayduie na linii łączącey te dwa punkta.

42. *Twierdz:* 9. Jeżeli od srodka Linii prostey wyprowadziemy prostopadłą; każdy Punkt w tey prostopadłey, będzie równo odległy od obydwóch końcow linii pierwszey; każdy zaś inny Punkt za tą

pro-

proſtopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końcow odległość mieć będzie.

Fig. 8. Niech będzie proſtopadła CD, do ſrodka C, linii AB.

*Nayprzod*: Odległości DA, DB, Punktu którégokolwiek D, wziętego na linii CD, od Punktów A i B. ſą równe.

*Dowodzenie*. W Troykątach ACD, BCD, kąty proſte przy C, ſą równe, i ramiona przy tych kątach równe, więc dwa te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie; a zatym linie AD, i BD ſą równe.

*Powtóre*: Niech będzie Punkt E, za proſtopadłą DC, linie EA, EB, nierówne będą.

Niech linia AE, przechodzi przez Punkt D, należący do proſtopadłey CD; od Punktu tego poprowadźmy linią DB.

*Dowodzenie*. Linie AD, BD, ſą równe, iako ſię iuż dowiodło; a że linia AE, równa ſię ſummie Linii AD, DE, więc linia AE, większa ieſt od linii AD, a zatym i od linii BD, która tamtey ieſt równa.

Zwy-

Zwykło się krócey ieszcze to potwierdzenie tak wyrażać: *Linia prostopadła, z pośrodka inney linii wyprowadzona, iest mieyscem* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obydwóch końców teyże linii.* (g)

43. *Zagadnienie* 3. Od punktu danego na linii prostey wyprowadzić linią prostopadłą.

*Rozwiązanie.* Weźmy na daney linii dwa inne Punkta, iednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, iako od środka (a centro) iednakowym promieniem, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danego, nakreślmy dwa łuki przecinaiące się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, którey szukaliśmy.



(g) *Ponieważ linia prosta, przez dane położenie dwóch Punktów, iest iuż tym samym wyznaczona; ieżeli tedy przez dwa inne Punkta, z których każdy iednakową ma od obydwóch punktów danych odległość, poprowadziemy linią, ta w środku linii łączącey dwa punkta dane, będzie prostopadłą.*

44. *Zagadnienie* 4. Od punktu danego za liniią proſtą, ſpuścić na nią liniią proſtopadłą.

*Rozwiązanie*: Znaydźmy dwa punkta na linii daney, iednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od ſrodka, iednakowym promieniem, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach liniią daną; ſzukaymy innego ieſzcze punktu równie od dwoch przecięcia punktow odległego. Linia łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany; ieſt ta ſama proſtopadła, którey ſzukaliśmy.

45. *Zagadnienie* 5. 1. Na daney linii wyſtawić Troykąt równoboczny.

2. Na daney linii wyſtawić Tróykąt równoramienny, którego ieden bok ieſt wiadomy.

3. Na daney linii wyſtawić Troykąt, którego dwa inne nierówne boki ſą wiadome.

*Rozwiązanie*: 1. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym teyże linii, pociągnąć trzeba po iedney ſtronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii daney.

2.

2. Z dwóch końców linii daney, promieniem równym linii, która ma ſłużyć za ramie Troykąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie linie do końców linii daney.

3. Z dwóch końców linii daney, promieniami odmiennemi, równemi w długości liniiom maiącym ſłużyć za boki do Troykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie linie do końcow linii daney.

*Przeſtroga.* Summa dwóch linii danych, powinna być większa od trzeciey linii także daney. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy Troykąt, ile wyſtawiony ieſt na iakiey proſtey linii; taka liniia nazywa ſię *Podſtawą* (Baſis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iey ſtoiący nazywamy *Wierzchołkiem Troykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przyſtoſowanie.* Przeryſować Tróykąt dany.

*Rozwiązanie:* Weźmy ieden z boków Troykąta za Podſtawę onego. Podſtawę tę przenieśmy na insze mieyſce; i od

 koń-

końców iey promieniami, dwom innym bokom równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie linie do końców podstawy; iuż tym samym przerysowany będzie Troykąt dany, na inny iemu we wszystkim równy.

48. *Zagadnienie* 6. Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za iedno ramie linią daną, a za wierzchołek punkt na tey linii także dany.

*Rozwiązanie.* Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąść trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią liniią. Zrobi się tym sposobem Troykąt. Od punktu danego na linii także daney, przenosi się długość, wzięta na iednym ramieniu kąta danego, i na niey iak na podstawie, przerysuie się Troykąt, pierwszemu ze wszystkim równy (47.)

49. *Przystosowanie.* 1. Zrobić Troykąt, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Troykąt, którego wiadoma podstawa, i dwa przy niey kąty.

50. *Zagadnienie* 7. Zrobić Troykąt, którego dany iest kąt ieden, i dwa boki, ieden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

*Uwaga.* Kąt dany może być *prosty*, *roztwarty*, albo ostry. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danemu, powinien być większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może być większy lub mnieyszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danemu, i daymy mu za ramie, linią równą daney, a maiącey mu służyć za toż ramie.

Z końca tey linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć naprzeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramie. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, linia CA równa linii daney za ramie tego kąta; i niech łuk kreślony od punktu A, iako od środka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramie w punktach B. i b. *Fig. 9. i Tab. III Fig. 1, 2, 3.*

1.

1. Gdy kąt C ieſt *Proſty;* dwa Troykąty: ACB, ACb mogą przyſtać do ſiebie; bo linii pochyłe równe AB, Ab, iednakowo ſą od proſtopadłey AC odległe, a zatym CB i Cb ſą równe.

W innych razach ſpuśćmy liniią proſtopadłą AD.

2. Gdy kąt C ieſt *Roztwarty*, albo oſtry, ale liniia AB, większa od AC; w tym razie linii pochyłe i równe AB, Ab dalsze są od proſtopadłey AD, niżeli liniia pochyła AC; a zatym z dwóch Troykątow ACB, ACb, ieden tylko Tróykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3. Gdy kąt C ieſt *oſtry*, ale liniia AB mnieysza od AC; dwie linii pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliżſze proſtopadłey AD, niżeli liniia AC; a zatym Tróykąty ACB, ACb, lubo ſobie nierówne, obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

*Powtòrzenie przypadków, w których dwa Troykąty mogą przyſtać do ſiebie, albo w których Troykąt wyznaczony ieſt przez wiadomość doſtateczną boków i kątów iego.*

1. Dwa

1. Dwa boki i kąt między niemi.

2. Bok ieden i dwa przy nim kąty.

3. Trzy kąty.

4. Dwa boki i kąt Prosty nie między niemi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niemi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny danemu kątowi iest naywiększy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny kątowi danemu iest naymnieyszy. (Ten przypadek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobem Troykąt czyni zadosyć trzem warunkom.

51. *Uwaga* 1. Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych ieszcze wyznaczyć można Troykąt Te iednak, które się tu wspomniały przypadki, nayczęściey zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztery ostatnie przypadki mogą być ściągnione do iednego. (Obacz w Rozdz: 10. Twierdz: 5.) Ale przy początkach lepiey ie osobno podawać.

52.

52. *Uwaga* 2. Same tylko Troykąty ſą takiemi figurami, gdzie wiadomość trzech boków iuż ieſt doſtateczna do wyznaczenia Troykąta. Okazać to w proſtym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którego wſzyſtkie boki ſą równe. Chociaż albowiem wiedzieć będziemy boki wſzyſtkie tego Czworoboka, nie potrafiemy iednak oznaczyć iaki Czworokąt ztąd wyniknie, bo tym bokom różne dać możemy nachylenie, a zatym i Czworokątowi odmienną dać możemy figurę. Tak nap: ieżeli damy mu kąty wſzyſtkie proſte, zrobi ſię *Kwadrat*, ieżeli damy dwa kąty oſtre, a dwa roztwarte, zrobi ſię Czworokąt pochyły tym bardziey, im oſtrzsze iedne kąty, a drugie roztwarſze mieć będzie.

53. *Twierdz*: 10. Linia proſta przecinaiąca kąt na dwie części równe, każdy w ſobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obydwóch ramion tegoż kąta; a wſzelki inny nie na tey linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

*Fig.* 4. Niech będzie kąt ACB, który na dwie części przecina linia CD; ieżeli Punkt iaki na niey, naprzykład D, weźmiemy, linie proſtopadłe DE, DF, do ramion tego kąta ſpuſzczone, będą równe.

*Do-*

*Dowodz:* Dwa Troykąty prostokątne CDE, CDF, które bok CD spólny maią, i kąty przy C równe, mogą przystać do siebie (18.) więc linie DE, DF, są równe.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłe GE, GH, będą nierówne.

Niech albowiem prostopadła GE, spotyka w punkcie D, linią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuśćmy prostopadłą DF, i poprowadźmy GF.

W Troykącie DFG, summa linii FD, DG, większa iest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równa się linii EG, więc linia EG, większa iest od linii FG. Aże znowu linia GF, większa iest od linii GH, (38.) więc tym bardziey Linia EG, większa będzie od linii GH.

54. *Uwaga.* Linia prosta, która przedziela kąt na dwie równe części, nazywa się *Mieyscem* wszystkich Punktów, których odległość iednakowa iest od dwóch linii danych.

55. *Zagadn:* 8. Dany maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

*Rozą-*

*Rozwiązanie.* Od wierzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie linie równe, z końców ich kreślę dwa łuki iednakowym promieniem. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę lin ią, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

56. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić daley na dwie równe części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może być (przynaymniey myślą) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

## ROZDZIAŁ III.

### *O Liniach równo-odległych i o równoległo-bokach.*

57. *Twierdzenie* 1. Niech będzie linia prosta, od którey dwóch punktów wychodzą dwie linie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zniydą, choćbyśmy ie naybardziey przedłużali.

*Dowodz:* Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią linią, od którey są wyprowadzone, Troykąt maiący dwa kąty proste; a to iest niepodobna.

58. *Defin:* Dwie linie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzone, gdy się zeyść z sobą nie mogą, nazwane są *Rownoodległe* (Parallelæ.)

W ogulności zaś mówiąc: iakiekolwiek liniie dwie proste od trzeciey przecięte iednakowo z iedney strony nachylaiące się do tey trzecicy linii, są równoodległe.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równe; te dwie liniie nie mogą się nigdzie zeyść z sobą. Gdyby albowiem gdzie się zeszły, w Troykącie z nich i z trzeciey linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednemu z wewnętrznych CAE; co być nie może. (31.)

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równa się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF, kątowi CAE można podobnie dowieść, że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiey strony linii HE.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Iednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CHE, nazywaią się *Wewnętrzne* (Interni) takie też są i kąty: FAE, GBH.

GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemian, to ieſt na przemian ległemi ( po łacinie zowią ſię *Alterni* ) toż nazwiſko daie ſię i kątom CAE, CBH.

Te Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czynią razem dwa kąty proſte; (14.) ale że kąt DBE równa ſię kątowi CAE, dla równey pochyłości obydwóch linii DB, i CA, do linii HE, więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razem wzięte równe będą dwom kątom proſtym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, ſą równe (16.) więc i kąty na przemian CAE, HBG równe będą.

64. Pierwsze Twierdzenie można i tak wyrazić: że ieżeli dwie linie proſte przecięte przez linią trzecią, czynić będą z nią kąty iednoſtronne równe, albo kąty na przemian równe, albo że dwa kąty wewnętrzne równać ſię będą ſummie dwóch kątow proſtych; takie dwie linie będą równo odległe.

65. *Zagadn:* 1. Daną maiąc iednę linią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech

Niech będzie linia dana BC, i punkt A także dany; przez ten Punkt poprowadzić linią równoodległą, od linii daney BC. Fig. 6.

*Rozwiązanie.* Przez Punkt A ciągniymy iakąźkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zrobmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Linia AE, będzie tą równoodległą, którey szukaliśmy.

*Dowodz:* Kąty na przemian DAE, ADC, są równe, więc linie BC, AE, są równoodległe.

66. *Twierdz:* 2. Jeżeli kąty iednostronne CAE, IBE, nie są równe, choćby też i bardzo nieznaczna była ich różnica, wszelako iednak linie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątow wewnętrznych IBH, CAE, mnieysza, albo większa iest od dwóch kątów prostych, tedy dwie linie CF, IL, zniydą się z tey strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieysza od dwóch kątów prostych. *Tab: IV. Fig. 1.*

Na dowodzenie tego Twierdzenia wysilali od dawnych czasow dowcipy swoie Geometrowie, i pospolicie fałszywie go dowodzili; bo będąc to Twierdzenie w sobie tak iasne, można było i

bez

bez dowodzenia na nie przyſtać. Można iednak dowieść go bez popadnienia omyłce; ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego natężenia, uwagi, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniow tym bardziey, im mniey przeświadczeni byliby o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiem, idąc w tym za przykładem Euklideſa, że lepiey ieſt mieć to Twierdzenie za oczywiſte, zwłaszcza dowiodłszy iuż dwóch innych Podań *odwrótnych*, (Propoſitio inversa) pierwszego: że, gdy linie ſchodzą ſię z ſobą, kąty iednoſtronne ſą nie równe; drugiego: że, gdy kąty iednoſtronne równe ſą, liniie z ſobą ſię zeyść nigdzie nie mogą.

67. *Wnioſek.* Jeżeli dwie liniie ſą równoodległe, a trzecia ie przecina, kąty iednoſtronne będą równe; kąty na przemian także równe; i kątów dwóch wewnętrznych ſumma równać ſię będzie ſummie dwóch kątów proſtych. Jeden z tych trzech wnioſkow przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak, iak w pierwszym Twierdzeniu. Jakoż, gdyby którakolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwa, iużby tym ſamym linie zeyść ſię gdzie z ſobą mogły, to ieſt nie byłyby równoodległe.

De-

*Defin*: Czworokąt, którego boki naprzeciwko siebie leżące są równoodległe, nazywać będziemy *Równoległobokiem*. (Parallelogrammum.) Linią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Dianogalis.)

68. *Twierdz*: 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD; mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe.

*Przygotowanie*. Poprowadźmy przekątną AC.

*Dowodz*: Dwa Troykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie; maią albowiem bok AC spolny, kąty na przemian ACD, CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatym (23.) i linie AB, DC są równe, iako też i liniie AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątow względem siebie równych w obydwóch Troykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątna dzieli Równoległobok na dwa Troykąty równe,

to

to ieſt takie, które przyſtać do ſiebie mogą.

70. *Wnioſek* 2. Jeżeli dwie linie ſą równoodległe, ſpuściwszy od dwóch punktów iedney, dwie proſtopadłe do drugiey, te proſtopadłe równe będą.

71. *Wnioſek* 3. Jeżeli Równoległobok ma ieden kąt proſty, wszyſtkie też inne kąty iego proſte będą; a ieżeli dwa iego boki przyległe, ſą równe, wſzyſtkie także boki równe będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którego kąty ſą proſte, nazywa ſię *Proſtokątem* (Rectangulum.)

Proſtokąt, którego wszyſtkie boki ſą równe, zowie ſię *Kwadratem*. Równoległobok, który ma kąty nierówne, zachowuie nazwiſko Równoległoboku; lubo czaſem z przydatkiem ſię wyraża, że ieſt Równoległobokiem *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszyſtkie ſą równe, nazwany być może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus.)

Fig. 2. 73. *Twierdz:* 4. Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne ſą równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiem.

Niech

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, CD, ſą równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie Równoległobokiem.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy Przekątną AC.

*Dowodz*: W Troykątach: ACD, CAB, boki trzy w iednym równe ſą trzem bokom w drugim; (68.) więc przyſtać do ſiebie mogą; (25.) w ſzczegulności zaś kąty na przemian CAB, ACD ſą równe, więc linije AB, CD ſą równoodległe; podobnie i linjie BC, AD ſą także Równoodległe.

74. *Twierdz*: 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwne ſą równe, i równoodległe, taki Czworokąt ieſt równoległobokiem.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którego boki przeciwne AB, CD ſą równe, i równoodległe, ten Czworokąt ieſt Równoległobokiem.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy Przekątną AC.

*Dowodz*: Dwa Troykąty: ACD, CAB, maią bok AC fpolny, boki AB i CD równe, i kąty na przemian: ACD, CAB, zawarte między temi bokami, równe; więc przyftać do fiebie mogą; (18.) a w fzczegulności, kąty: CAD, ACB będą równe, że zaś fą na przemian, więc liniie AD i CB fą równoodległe.

75. *Uwaga*. Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie być przeto Równoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe bokom równoodległym, fą proftopadłe. Widzieć to można na Figurze 3, gdzie lubo Czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie ieft iednak Równoległobokiem.

76. *Zagadn*: 2. Maiąc daną liniią proftą, poftawić na niey Kwadrat.

*Rozwiązanie*. Z końca iednego linii daney, wyprowadźmy proftopadłą iey równą. Z drugiego końca tey daney linii i proftopadłey, iako do środka promieniem równym daney linii, nakreślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcem linii daney i proftopadłey.

*Dowo-*

*Dowodz*: Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wſzyſtkie boki równe, i kąt ieden proſty, więc będzie Kwadratem.

77. *Zagadn*: 3. Wykreślić proſtokąt, którego boki ſą dane.

Spoſób wykreślenia ieſt ten ſam, co wyżey, (76.) z tą różnicą, że proſtopadła powinna mieć długość daną, a nie być równą podſtawie; promienie także łukow kreślić ſię maiących, ieden powinien być równy podſtawie, a drugi proſtopadłey.

78. *Zagadn*: 4. Wykreślić Równoległobok, którego kąt ieſt wiadomy, i boki.

Spoſób wykreślenia tym tylko różni ſię od poprzedzaiącego, że zamiaſt proſtopadłey, poprowadzić potrzeba liniią z tym nachyleniem, któreby czyniło kąt dany.



# ROZDZIAŁ IV.

## *O kątach w Figurach Proſtokreślnych, a w szczegulności w Troykątach.*

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Troykąta, większy ieſt od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iemu przeciwnych; dowiedziemy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa ſię obydwom kątom wewnętrznym na przeciw ſiebie leżącym.

Fig. 4. 79. *Twierdz:* 1. Niech będzie Troykąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy ieſt ſummie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

*Dowodz:* Kąty na przemian C i CBE ſą równe; równe także i kąty iednoſtronne: A i EBD; więc ſumma kątów: C i A, równa ieſt ſummie kątów: CBE i EBD, to ieſt kątowi zewnętrznemu CBD.

80. *Twierdz:* 2. W każdym Troykącie, ſumma trzech kątów równa ieſt dwom kątom proſtym.

Niech

Niech będzie Troykąt: ACB; ſumma trzech iego kątów, równa ſię ſummie dwoch kątow proſtych.

*Przygotowanie.* Pociągniymy daley AB, naprzykład aż do D.

*Dowodz:* Już ſię dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równa ſię dwom kątom wewnętrznym A i C; więc ſumma kątów CBD, i CBA, równać ſię będzie ſummie kątow: A, C, i CBA; ale ſumma dwóch piérwszych kątów, iako przyległych; wyrównywa dwom kątom proſtym, więc i druga trzech kątów ſumma, tymże dwom kątom proſtym ieſt równa. (h)

81.

(h) *To Twierdzenie ieſt bardzo wielkiey wagi, przeto trzeba, aby iak naydokładniey zrozumieli ie Uczniowie, iako i inne Twierdzenia, od których dowiedzenie tego zawiſło. Tu podobno mieyſce byłoby pokazania związku Twierdzeń dotąd podanych iednych z drugiemi, który to związek iſtotny ieſt poſtępowaniu Geometrycznemu. Cwiczenia, które poprzedziły, iuż powinny były dać poznać Uczniom ten ſpoſob poſtępowania. Trzeba iednak często im związek*

81. *Wniosek* 1. W Troykącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, iest trzecią częścią dwoch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$. kąta iednego prostego, to iest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek* 2. W Troykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tym samym znany i kąt trzeci.

*Przykład*. Niech będzie Troykąt, którego kąt ieden ma stopni $50^{\circ}$, a drugi $72^{\circ}$, summa tych dwóch kątów będzie $122^{\circ}$. Różnica zaś $122^{\circ}$ od dwóch kątów prostych, albo od $180^{\circ}$, iest $58^{\circ}$, i ta iest ważność trzeciego kąta.

83. *Wniosek* 3. W Troykącie równoramiennym, znaiąc kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

*Przy-*

---

*takowy okazywać, i iak się iedna prawda z drugiey odkrywa. Ztąd naywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwego ducha Matematycznego, co nierównie pożyteczniey im będzie, iak mieć nawet wiadomość samey Matematyki.*

*Przykład.* Niechby kąt ieden przy wierzchołku ważył $40^{\circ}$, w Troykącie równoramiennym. Już tym samym dwa inne ważą $140^{\circ}$, aże są równe, każdy z nich ważyć będzie połowę, to iest $70^{\circ}$.

Niechby znowu kąt ieden przy Podstawie ważył $64^{\circ}$, i drugi przy Podstawie ważyłby $64^{\circ}$. Summa tych dwoch kątów byłaby $128^{\circ}$, a różnica między $180^{\circ}$, i $128^{\circ}$. to iest $52^{\circ}$, pokazałaby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin:* Figura maiąca wiecey niż cztery boki, albo kąty, nazywa się *Wielokątem* (Polygonum.)

85. *Twierdz:* 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokreślney* (Figura Rectilinea.) zawisła od liczby boków teyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoioney liczbę: 4; reszta okaże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokreślney. Nim się przystąpi

do

do ogulnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następującemu.

Niechby naprzykład Figura Prostokreślna miała tylko cztery boki, to iest niechby tylko była Czworokątem. Poprowadziwszy w niey Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Troykąty, w których summa kątów razem wzięta, będzie równa summie kątów w Czworokącie. Aże ta summa kątów w dwóch Troykątach, waży cztery kąty proste, więc i summa kątów w Czworokącie ważyć także będzie cztery kąty proste.

Niechby Figura miała pięć boków, to iest była *Pięciokątem* (Pentagonum.) Poprowadźmy od iednego wierzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątne; podzielą one Pięciokąt na trzy Troykąty, których summa ważności kątów, to iest 6. kątów prostych, będzie też summą ważności kątów Pięciokąta.

*Dowodzenie ogulne.* Od wierzchołku kąta któregokolwiek w Wielokącie, poprowadźmy tyle przekątnych, ile można. Postrzeżemy łatwo, że Troykątów liczba z tego podziału wynikaiąca, mnieysza będzie dwoma, od liczby boków Wie-

Wielokąta; albowiem od kąta tego, od którego się prowadziły Przekątne, nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów naybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa naybliższe boki, alko ramiona tego kąta, i nie zrobiły Troykątów. Ponieważ zaś w każdym Troykącie ważność trzech kątów, równa się ważności dwóch kątów prostych będzie więc dwa razy tyle zawierało się (co do ważności) kątów prostych, w Wielokącie, ile się zawiera w nim Troykątów. Aże liczba Troykątów, mnieysza iest dwoma, od liczby boków Wielokąta; więc liczba kątów prostych, w tymże Wielokącie, będzie dwa razy tak wielka, to iest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niey dwa razy 2. to iest 4; a zatym ważność kątów wszystkich Wielokąta w kątach prostych znaydziemy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta. (i)

*Twier-*

---

(i) *Dowodzenie to mogłoby się wydawać trudnym, gdyby go wiele przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczególny przykład kreślone nie obiaśniły. Wiele iednak na tym zawisło, aby i bez*

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daley w iednę ſtronę boki wszyſtkie Wielokąta, iakażkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze

---

*Figury przyuczali ſię Uczniowie dawać ſprawę z tego, czego ſię nauczyli, a tym ſpoſobem aby wprawiali ſię w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które ſobie czynić będą, iako też i w ſamych wyrazach. Szczegulnieyszego zaś ſtarania przykładać trzeba, aby bardziey rozumem, niż pamięcią wſzyſtko to, czego ſię uczyć będą, ogarnywali. Z tey przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagadnień, opuszczało ſię umyślnie Figury. Niech iednak ztąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyść ſię mogło; i owszem niech przyuczaią Uczniów, aby ie ſami ſobie kreślić umieli z pamięci, zrozumiawſzy pierwey Twierdzenia, do których dowodzenia ſtoſować ſię maią te Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym ſposobem ſię podawały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dawali ſprawę z działań iuż dobrze od ſiebie poiętych. Odpowiedz naypoſpolitsza młodych ieſt, tych nawet, którzy lepiey rzecz przenikaią:* Umiem ia to, ale ſię wytłomaczyć nie mogę.

zawsze iednak ſumma kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem iednym i przedłużeniem drugiego przyległego, ważyć będzie cztery kąty proſte. (k)

Nim ſię przyſtąpi do ogulnego Dowodzenia, trzeba pierwey na ſzczegulnych przykładach tego Twierdzenia dowieść; zacząwszy od Troykąta, w którym każdy kąt z ſwoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proſte; a że kątów ieſt w Troykącie trzy, więc z przyległemi ważyć będą ſześć kątów proſtych; trzy zaś kąty, które ſię w Troykącie znayduią, ważą dwa kąty proſte; więc te, ktore ſą za Troykątem, to ieſt zewnętrzne, ważyć będą cztery kąty proſte.

*Dowodzenie ogulne.* Każdy kąt wewnętrzny w wielokącie, z ſwoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proſte; więc ſumma wſzyſtkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proſte wzięte tyle razy, ile ieſt boków w Wielokącie; a zatym ſum-

(k) *Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy ieſt od dwóch kątow proſtych; to ieſt o takich, w których kąty ſą wyſkakuiące* (Salientes.)

fumma famych kątów zewnętrznych, ważyć będzie tyle, ile brakuie fummie kątów wewnętrznych, aby ważyła dwa kąty profte wzięte tyle razy, ile ma boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącym Twierdzeniu dowiedli;) brakuie do tego tey fummie kątów cztery; więc fumma kątów zewnętrznych Wielokąta ważyć będzie cztery kąty profte.

87. *Uwaga* 1. Naywiększey wagi są te przypadki, w których kąty wfzyftkie Wielokąta są równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4. kąty profte, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdego kąta zewnętrznego znaydziemy, odtrąciwfzy ten wieloraz, to ieft: ważność iednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów proftych.

Jeżeli wfzyftkie kąty wielokąta są równe, tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyfzy będzie wewnętrzny, a im mnieyfzy tamten, tym ten większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzeniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć fobie Tablicę ważności kątow tak wewnętrznych, jako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wfzyftkie są równe, i mo-

mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty proste, czyli przez stopnie.

88. *Uwaga* 2. Umieiąc dowieść dwóch Twierdzeń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co następuie zadanie:

Jak wielorakim sposobem około Punktu danego napełnić można mieysce (to iest cztery kąty proste) przez kąty Figury Prostokreślney iednego gatunku, (I) y którey wszystkie kąty są równe?

1. Gdy Troykąt ma wszystkie boki równe, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego waży trzecią część dwoch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; a zatym sześć takich kątów, uczyni 4. kąty proste, i napełni mieysce około Punktu iednego.

2. Gdy Czworokąt ma wszystkie kąty równe, czyli iest Prostokątem; każdy z ką-

(I) *Mówię* iednego gatunku, *ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów*, *możnaby* 14. *sposobami napełnić mieysce około iednego Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów*, *które kąty wszystkie równe maią.*

kątów iego ieſt kątem proſtym, a zatym 4. takie kąty ważyć będą 4. kąty proſte.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którego kąty wſzyſtkie ſą równe, waży $\frac{1.}{5.}$ część czterech kątów proſtych, albo $\frac{4.}{5.}$ iednego kąta proſtego, a zatym każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie: 1, $\frac{1.}{5.}$ kąta proſtego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proſte i $\frac{3.}{5.}$ co ieſt mniey iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proſte i $\frac{4.}{5.}$, co ieſt więcey iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącego wſzyſtkie kąty równe, nie można napełnić mieyſca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wſzyſtkie ſą równe, waży $\frac{1.}{6.}$ część czterech kątów proſtych, albo $\frac{2.}{3.}$ iednego kąta proſtego; a zatym każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie: 1 $\frac{1.}{3.}$ kąta proſtego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proſte.

Jeże-

Jeżeli Wielokąt ma więcey niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcey niż 4. kąty proste; aże kąt Wielokąta maiącego boki wszystkie równe, iest zawsze mnieyszy od 2. kątow prostych; więc dwa takie kąty nie wystarczą na napełnienie mieysca około Punktu iednego.

Przeto trzema tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie; to iest przez 6. kątów Troykąta, przez cztery kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta. *Fig. 5, 6. i Tab. V. Fig. 1.*

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

## ROZDZIAŁ V.

*O Równoległobokach i Troykątach równych co do Powierzchni; i o zamienieniu iakieykolwiek Figury Prostokreślney na Troykąt i na Równoległobok.*

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki, w których dwa Troykąty mogą przystać do siebie; i być zatym co do Powierzchni, równe. W Rozdziale trze-

trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równe mogły przyftać do fiebie; i że zatym Powierzchnie ich równe były. Te przypadki przyftawania iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni, przypadkami fzczegulnemi; ogulnieysze zaś w tey mierze Twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twierdzenie 1.* Dwa Równoległoboki zrobione na iedneyże Podftawie, a z przeciwney ftrony zakończone przez Liniią równoodległą od poftawy, maią Powierzchnie równe.

Fig. 2, 3, 4. Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż fama ieft Podftawa AB, a kończy ie z drugiey ftrony, równoodległa od Podftawy Linia: DE. Te dwa Równoległoboki, maią równe Powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

*Dowodz:* Troykąty: DAF, CBE, mogą przyftać do fiebie; boki albowiem AD, BC fą równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednoftronne: ADF, BCE, i AFD, BEC. równe.

Od-

Odiąwszy tedy osobno Troykąt DAF, i Troykąt iemu równy CBE, od całey Figury ABED; reszty będą równe, to ieſt Równoległobok AFEB. równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twierdzenie możnaby obiaśnić Figurą z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża Figura 2, gdzie punkta C i F razem przypadaią. W takim razie Troykąty: ACD, BEC równe ſą pierwszy i drugi Troykątowi: ABC, a zatym i ſobie ſą równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony ieſt z dwóch Troykątów równych.

90. *Defin*: Ponieważ linie proſtopadłe ſpuszczone od któregokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, ſą równe; ieżeli więc od punktu któregokolwiek w boku Równoległoboku ſpuściemy do boku przeciwnego liniią proſtopadłą, ta proſtopadła iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa ſię *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiego boku, do którego ieſt ſpuszczona, i który wzięty ieſt za Podſtawę tegoż Równoległoboku. Twierdzenie poprzedzaiące możnaby też i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiące ſpolną Podſtawę, i wysokość iednakową, ſą równe.*

91. *Twierdznie* 2. Dwa Równoległoboki są równe, których Podstawy i wysokości równe.

92. *Dowodz*:Do Podstawy iednego z tych Równoległoboku, przyłożmy Podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie te Podstawy, bo są równe; będą więc te postawione na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość, a zatym według pierwszego Twierdzenia będą równe.

93. *Twierdz*: 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobione na iedney Podstawie, równe maią Powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Fig. 5. Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obydwóch Podstawa iest AB, i równa Powierzchnia; maią one i wysokość iednakową, to iest zakończone są przez tę samę linią równoodległą od Podstawy.

*Dowodz*: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iey przedłużeniu; toby inne iakie Punkta naprzykład H, i G. linii AF, BE, były na teyże linii DC, a zatym Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzieli

za równe Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równe, co iest niepodobna, chyba że Punkta H i G, będą te same, co i Punkta F i E.

W ogulności mówiąc: Dwa Równoległoboki, maiące równe Podstawy i Powierzchnie, maią też i równe wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równe, i Podstawy ich równe będą.

94. *Twierdz:* 4. Gdy Troykąt i Równoległobok, stoi na teyże samey Podstawie, a wierzchołek Troykąta przypada na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku; taki Troykąt iest połową Równoległoboku.

Niech będzie Równoległobok ABCD, a Troykąt ABE; maiący z nim spólną podstawę AB; i niech wierzchołek E, Troykąta przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Troykąt ten ABE; będzie połową Równoległoboku ABCD. *Tab. VI. Fig.* 1.

*Przygotowanie.* Przez B poprowadźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

*Dowodzenie.* Troykąt ABE, ieſt połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Troykąta ieſt Przekątną Równoległoboku: ABFE. Aże Równoległoboki ABFE, ABCD, ſą równe, więc Troykąt ABE, ieſt także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Proſtopadła ſpuszczona od wierzchołku Troykąta do Podſtawy, nazywa ſię *wysokością* tego Troykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło być inaczey wyrażone: *Jeżeli Równoległobok i Troykąt maią ſpolną Podſtawę, i wysokość równą, Troykąt ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek.* Można więc przyſtosować wszyſtko do Troykątów, cokolwiek ſię o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Troykąty maiące równe Podſtawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

2. Dwa Troykąty równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podſtawach; będą też miały równe Podſtawy lub wysokości.

W ogulności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podſtawy, wysokości, i powierz-

wierzchni Równoległoboku lub Troykąta, dwie którekolwiek wiadome, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczna, aby z niey dwie drugie wyznaczyć można. Obaczemy daley w tym Rozdziale: iako można zrobić tyle Równoległoboków równych i równokątnych ile zechcemy, chociaż boki nierówne mieć będą. (m)

97. *Zagadn:* I. Maiąc dany Równoległobok, zamienić go na Prostokąt, któryby tę samę miał Podstawę i Powierzchnią.

*Rozwiązanie.* Od obydwóch końców Podstawy, wynieśmy liniie prostopadłe, aż do boku Podstawie przeciwnego; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powierzchni.

Podobnym sposobem postąpić sobie potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszemu w Podstawie i w Powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98.

(m) *Trzeba to dobrze dać poznać Uczniom, że wielkość Równoboków i Troykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w tey mierze częste zwykły bywać.*

98. *Zagadn:* 2. Troykąt dany zamienić na inny Proſtokątny, któryby miał tę ſamę Podſtawę i Powierzchnią.

*Rozwiązanie.* Przez wierzchołek Troykąta danego, poprowadźmy równoległą od Podſtawy, a od końca którego kolwiek teyże podſtawy, wynieśmy proſtopadłą aż do równoległey; Punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wierzchołkiem Troykąta ſzukanego.

Podobnym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie chcąc zamienić Troykąt dany na drugi równy mu w Podſtawie i w Powierzchni: gdy inny a nie proſty kąt przy Podſtawie dać będzie potrzeba temu drugiemu Troykątowi.

99. *Zagadn:* 3. Zamienić Troykąt dany, na Równoległobok proſtokątny, któryby miał albo tę ſamę co Troykąt podſtawę, albo tę ſamę wyſokość.

*Rozwiązanie.* Równoległobok proſtokątny, któryby miał tę ſamę Podſtawę, i wysokość, co Troykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatym Równoległobok ten, którego ſzukamy, powinien mieć tę ſamę Podſtawę co Troykąt, a połowę iego wyſokości; albo też tę ſamę wyſokość a połowę tylko Podſtawy.

100.

100. *Zagadn:* 4. Czworokąt dany zamienić na Troykąt teyże famey powierzchni.

*Rozwiąz:* Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek iednego z kątów iey przeciwnych, pociągniymy równoległą od teyże przekątney. Wszyftkie Troykąty maiące zą podftawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległey od tey przekątney będą równe w Powierzchni Troykątowi, który czyni ta przekątna z dwoma bokami Czworokąta fchodzącemi fię na równoodległey (96.) a zatym będzie też równy w powierzchni temu Troykątowi i Troykąt maiący za Podftawę tę famę co i tamten przekątną, a zą bok ieden, maiący przedłużenie aż do równoległey, boku Czworokąta leżącego z drugiey ftrony przekątney; ten Troykąt oftatni dodawszy do Troykąta z drugiey ftrony przekątney leżącego, zrobi fię Troykąt równy co do powierzchni Czworokątowi danemu; bo, ponieważ Troykąty dwa, na które ieft Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią fię co do powierzchni całemu Czworokątowi; więc temuż Czworokątowi równy także będzie co do powierzchni i Troykąt przez przekątną w Czworo-

ro-

rokącie uczyniony; a drugi równy w powierzchni Troykątowi drugiemu wchodzącemu także w Czworokąt i onego dopełniaiącemu.

*Fig. 2.* Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niey równoległą CE, przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Troykąta drugiego w Czworokącie pociągniemy aż do zeyścia się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi się Troykąt ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD.

101. *Uwaga.* Tym sposobem postąpiemy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiem Figurę iaką prostokreślną, bez odmienienia iey powierzchni. Poprowadziemy nayprzod przekątną, któraby odcieła Troykąt ieden w Figurze podaney; potym przez wierzchołek tego Troykąta pociągniemy równoodległą od tey przekątney, aż do zeyścia się teyże równoodległey z bokiem drugim przyległym do przekątney; naostatek złączemy punkt przecięcia z drugim końcem teyże przekątney.

Można nawet użyć sposobu tego do zamienienia iakieykolwiek Figury prostokreślney,

kreślney,

kreślney, na Troykąt teyże ſamey, co i podana Figura powierzchni; a to zmnieyszaiąc nayprzód iednym bokiem Figurę podaną; potym odeymuiąc znowu bok ieden, zmnieyszoney iuż iednym bokiem Figurze i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, to ieſt do Troykąta nie przyiдziemy.

*Przykład.* Niechby trzeba zamienić Pięciokąt ABCDE na Troykąt teyże ſamey powierzchni. *Fig.* 3.

Poprowadźmy przekątne: DB, DA, przez C i E pociągniymy równoodległe CG, EF, aż do ich zeyścia ſię z linią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Troykąt DFG będzie równy w powierzchni Pięciokątowi danemu.

102. *Wnioſek.* Widzieliśmy, (99.) że Troykąt może być zamieniony na Równoległobok proſtokątny, maiący tę ſamę co i Troykąt powierzchnią; a zatym można każdą Figurę proſtokreślną zamienić zawsze na proſtokąt nie różniący ſię od niey w powierzchni, mogąc ią pierwey zamienić na Troykąt.

103.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie iakie Figury proſtokreślne, którebyśmy iuż zamienili obydwie na Proſtokąty; i niechby te dwa proſtokąty miały albo podſtawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu proſtokąt, któryby równy był w powierzchni, ſummie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Proſtokąt albowiem, któryby miał podſtawę równą ſummie albo różnicy Podſtaw w obydwóch mnieyszych Proſtokątach (gdyby ich wysokości były równe) i tę ſamę co one wysokość, byłby równy w powierzchni ſummie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce ſię także pokaże, iż można zamienić Proſtokąt ieden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w ſobie bok ieden dany; a zatym można zawsze dwa Proſtokąty do tego przyprowadzić, aby miały ieden bok równy w obydwóch; przeto można zawsze i Proſtokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcey Figurom proſtokreślnym podanym.

104. *Twierdz:* 5. W iakimkolwiek Proſtokącie, poprowadziwszy przekątną, a przez iey punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków proſtokąta, będą równe w powierzchniach dwa

dwa proſtokąty, przez te równoodległe zrobione, a ztykaiące ſię w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Proſtokąt ABCD, przez punkt E, przekątney poprowadziwszy równoodległe: HF, GI; Proſtokąty HEGD, FEIB będą równe w powierzchniach. Fig: 4.

*Dowodz*: Troykąty ACD, CAB ſą równe. Pierwszy ſkłada ſię z Troykątów CEG, EAH, i z Proſtokąta HEGD. Drugi ſkłada ſię z Troykątów ECF, AEI, i z Proſtokąta FEIB. Aże Troykąt CEG, równy ieſt Troykątowi ECF, a Troykąt EAH, równy Troykątowi AEI; więc i Proſtokąt HEGD, równy będzie Proſtokątowi EFIB.

Twierdzenia podobnego poprzedzaiącemu, gdy równoległobok nie będzie proſtokątny, tymże ſamym ſpoſobem dowieść można.

105. *Zagadn*: 5. Dany Proſtokąt zamienić na inny teyże ſamey powierzchni, któryby miał za bok, linią daną.

Niech będzie Proſtokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby linia dana za bok ſłużyła. Fig: 5.

*Roz-*

*Rozwiąz*: Pociągniymy daley bok AB, aż do E, tak, aby linia BE, równa była linii daney. Dopełniymy Prostokąta DEFC, i poprowadźmy przekątną FB, któraby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potym FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni Prostokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Że równe są te dwa Prostokąty, można okazać podobnym iak w ostatnim twierdzeniu sposobem.

106. *Uwaga* 1. Aby dodać dwa Prostokąty maiące boki odmienne; trzeba nayprzód ieden z tych prostokątów zamienić na inny równey z nim powierzchni, któryby miał bok ieden równy bokowi prostokąta drugiego nie zamienianego. Wziąwszy potym za wysokość, ten bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, summę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga* 2. Gdyby Prostokąty dane były Kwadratami; a Prostokąt równy ich summie miał też być Kwadratem; po-

prze-

przedzaiące wiadomości, nie dosyć były-by na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżey obaczemy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystosowanie.* Nie powtarza się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażone. Przystosowanie teraźnieysze ściągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Troykątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby doyść powierzchni Czworokąta, którego przekątna i prostopadła od wierzchołku kąta iey przeciwnego spuszczona, w liczbach iest dana; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obydwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąść połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia iego byłaby równa Prostokątowi maiącemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Przy-

Fig: 6. *Przykłady.* 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia iego będzie $20 \times 37 = 740$. łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378}{27} = 14$. łokci.

3. Niech będzie powierzchnia Równoległoboku ABCD $= 544$. łokci kwadratowych; wysokość DE $= 17$. łokci. Podstawa AB, będzie $= \frac{544}{17} = 32$. łokci.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stop 1. cal. 10. to iest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14. stop. 1. cal: 8. to iest $14.\frac{5}{6}$. łokci; powierzchnia będzie $14.\frac{5}{6}$ razy $23.\frac{11}{12}$ $= 354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr: $=$ 354. łok: kw: 3. stop. 8. cal:

5.

5. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD będzie = 8433. sznur: Kwad: 72. pręt: kw: = 8433, 72. sznur: kwad: podſtawa AB = 153. ſznur: 9. pręt: = 153, 9. ſznur: wysokość DE, będzie = $\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ = 54,. 8. ſznur: = 54. ſznur: 8 .pręt:

6. Niech powierzchnia Równoległoboku ABCD, będzie = 315 Ł. K., 3 St: Kw., 58. Cal: Kw: = 315. $\frac{245}{288}$. Ł. K. wysokość DE = 15. Łok: 1. St: 10. Cal: = 15. $\frac{11}{12}$ Łok: podſtawa będzie = $\frac{90965.}{4584}$ Łok: = 19. Łok: 1. Stop: 8. $\frac{49}{191.}$ Cal:

7. Niech będzie ABC Troykąt, którego podſtawa AB, = 28. łokci, a wysokość CD = 16. łokci. Powierzchnia iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych, czyli = $\frac{28 \times 16.}{2}$ = 28 × 8. = 224. Łok. kw: *Tab: VII. Fig. 1.*

8. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 156. ſtop kw: a podſtawa AB = 24.

24. ſtop. Wysokość CD, będzie $= \frac{156}{\frac{1 \times 24}{2}} = \frac{312}{24.}$ albo $\frac{156}{12.} = 13.$ ſtop.

9. Niech będzie powierzchnia Troykąta ABC = 195. Ł. kw: a wyſokość CD = 15. łokci. Podſtawa AB będzie $= \frac{195}{\frac{1 \times 15.}{2}} = \frac{390}{15.} = 26.$ Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Troykąt, którego podſtawa AB = 12, 2, 2. (pręt: łok: cal:) $= 12. \frac{5}{18.}$ pręt: Wyſokość $= 7. \frac{5}{6.}$ pręt: powierzchnia będzie $= 7. \frac{5}{6.} \times 6. \frac{5}{36} = 48. \frac{19}{216.}$ pręt: kw: = 48. pręt: kw: 4. łok: kw: 3. ſtop. 114. cal: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Troy-

| | ł. kw: | cal: kw: | ło: kw: |
|---|---|---|---|
| kąta ABC = | 25. | 32. = | $25\frac{1}{18}$ |
| | Ł. | cal: | linii Łokci. |
| podſtawa AB = | 9. | 2. | 8. = $9.\frac{1}{9.}$ |

wysokość CD będzie $= \frac{451}{82.} = 5.$ Ł. 1. ſto:

12.

12. Niech będzie powierzchnia Troykąta = 21. szn: kw: 17. pręt: kw: Wysokość CD = 5. szn: 8. pręt: podstawa AB będzie = $\frac{21, 17.}{2, 9.}$ albo $\frac{42, 34.}{5, 8.}$ = 7, 3. szn: 7. szn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległe boki AB, CD; *Fig. 2.*

- bok AB = 35. łok.
bok CD = 17. łok.

A zatym summa ich = 52.
Wysokość DE = 14.
Powierzchnia tego Czworokąta będzie = $\frac{14 \times 52.}{2.}$ = 7 × 52, albo 14 × 26. = 364. ł. kw:

14. Aby powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego boki dwa równoległe są:
ieden AB = 23. cal:
drugi CD = 11.

A zatym summa = 34.
Trzeba mu dać wysokość = $\frac{255}{17.}$ = $\frac{510}{34.}$ = 15. cal.

15. Aby zaś powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 325 Stop: kw:

F gdy

gdy podſtawa AB = 31. ſtop, a wyſokość ED = 13. trzeba, aby ſumma boków równoodległych była $= \frac{325}{\frac{1}{2} \times 13.} = \frac{650}{13.} = 50.$ ſtop: Aże bok AB = 31. ſtop. więc CD będzie = 19. ſtop.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| AB = | 20. pr: | 4. ło. | 1. st. | 6. cal. |
| CD. = | 13 | 5. | 1. | 4. |
| A zatym ſumma = | 34. | 2. | 1. | 10. = |

34. $\frac{7}{18.}$ pręt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Wysokość DE = | 9. | 5. | 1. | 8. = |

9,$\frac{7}{9}$.

Powierzchnia będzie $= 9.\frac{7}{9.} \times 17.\frac{7}{36} =$ 168.$\frac{10}{81.}$ pręt: kw: 168. pręt: kw: 6. łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

*Fig.* 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątna DB = 86. łokci; proſtopadłe zaś do niey ſpuszczone; - - AE = 39.
- - - CF = 25.

A zatym ich ſumma AE+CF = 64. łok: Powierzchnia tego Czworokąta będzie $= \frac{64 \times 86.}{2.} = 32. \times 86.$ albo 64. × 43. = 2752. łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekątna AB = 26. ſzn: 8. pret: 6. łok: = 26. $\frac{22}{25}$. ſzn:
Proſtopadłe: AE = 13. ſzn: 7. pręt: 5: łok:
CF = 11. 9. 6. $\frac{1}{2}$.

A zatym AE + CF = 25. 7. 4
= 25. $\frac{113}{150}$. ſznur:

Powierzchnia Czworokąta ABCD będzie = 25. $\frac{113}{150}$. × 13. $\frac{11}{25}$. = 346. $\frac{78}{628}$. ſzn: kw:

19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok: *Fig.* 4.

Przekątne: AC = 79.
CE = 81.

Proſtopadłe: CH = 49.
BF = 42.
DG = 39.

Znaydziemy Powierzchnie Troykątów:

AEC = 49 × 64. = 3136. łok: kw:
ABC = 21 × 79. = 1659.
EDC = 39 × 81. = 1579. $\frac{1}{2}$.

A zatym Powierzchnia Pięciokąta ABCDE będzie = 6374. $\frac{1}{2}$. ło: kw:

 20.

*Fig.* 5. 20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą

Przekątne: { AC = 200. łok:
AE = 125.

Prostopadłe: { BG = 23.
DH = $80.\frac{1}{2}.$
DI = $64.\frac{3}{4}.$
FK = 42.

A zatym BG+DH = $103.\frac{1}{2}.$ łok:

DI+FK = $106.\frac{3}{4}.$

Znaydziemy Powierzchnie Czworokątów:

{ ABCD = $103.\frac{1}{3}. \times 100.$ = 10350. ł. kw:
ADEF = $53.\frac{3}{8}. \times 125$ = $6671.\frac{7}{8}.$

Powierzchnia tedy całego
Sześciokąta będzie = $17021.\frac{7}{8}.$ łok: kw:

Inaczey następuiącym sposobem znaleść można Powierzchnią Sześciokąta: ABCDEF.

Niech

Niech będzie

*Fig:* 6.

| | | szn: | pręt: | łok: | |
|---|---|---|---|---|---|
| | bok AB = | 20. | 0. | 0. | |
| Równoodległe: | FG = | 23. | 7. | $3.\frac{1}{8}.$ | |
| | CH = | 23. | 2. | $2.\frac{13}{16}.$ | |
| | EI = | 12. | 2. | $2.\frac{3}{16}.$ | $= 12.\frac{11}{48}.$ Sz: kw: |
| Części prostopadłey DN. | DK = | 2. | 4. | $7.\frac{7}{24}$ | $= 2\frac{179}{360}.$ |
| | KL = | 4. | 6. | $6.\frac{1}{4}.$ | $= 4.\frac{41}{60}.$ |
| | LM = | 1. | 0. | $3.\frac{1}{4}$ | $= 1.\frac{1}{20}$ |
| | MN = | 7. | 8. | $5.\frac{5}{6}.$ | $= 7.\frac{79}{90}.$ |

A zatym AB+FG = 43. 7. $3.\frac{1}{8}. = 43.\frac{89}{20}.$

FG+CH = 46. 9. $5.\frac{15}{16}. = 46.\frac{47}{48}.$

CH+EI = 35. 4. 5. $= 35.\frac{5}{17}.$

Więc Troykąt DEI $= 1.\frac{179}{720}. \times 12\frac{11}{48}. =$

$15.\frac{9313}{34560}.$ szn: kw:

Czworo

Czworokąty. EICH $= 2.\frac{41}{120} \times 35.\frac{7}{15} = 83.\frac{23}{450}$

CHFG $= 1.\frac{1}{20} \times 23.\frac{47}{96} = 24.\frac{85}{128}$

ABGF $= 3.\frac{169}{180} \times 43.\frac{89}{120} = 172.\frac{6341}{21600}$

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF $= 295\frac{641}{21041}$.

*Fig. 7.* 21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znalezliśmy, to iest:

Części przekątney AD:
- AH $= 32\frac{2}{3}$ stopy.
- HI $= 35$.
- IK $= 15.\frac{1}{3}$.
- KL $= 81.\frac{5}{6}$.
- LM $= 11.\frac{5}{6}$.
- MD $= 13.\frac{1}{3}$.

Prostopadłe:
- GH $= 78.\frac{1}{2}$.
- BI $= 56.\frac{1}{3}$.
- FK $= 64$.
- EL $= 86.\frac{1}{3}$.
- CM $= 45.\frac{5}{6}$.

stop: kw:

Będą tedy Troykąty:
- AHG $= 16.\frac{1}{3} \times 78.\frac{1}{2} = 1282.\frac{1}{6}$.
- ABI $= 28.\frac{1}{6} \times 67.\frac{1}{3} = 1905.\frac{17}{18}$.
- DLE $= 43.\frac{1}{6} \times 25.\frac{1}{6} = 1086\frac{13}{36}$.
- CMD $= 6.\frac{2}{3} \times 45.\frac{5}{6} = 305.\frac{5}{9}$.

Czwo-

Czworokąty: { HKFG $= 26.\frac{1}{6}. \times 142.\frac{1}{2}. = 3568.\frac{1}{4}.$
KLEF $= 81.\frac{5}{6}. \times 75.\frac{1}{6}. = 6151.\frac{5}{36}.$
BCMI $= 109. \times 51.\frac{1}{12}. = 5568.\frac{1}{12}.$

A zatym cały Siedmiokąt ABCDEFG $=$ $19885.\frac{1}{2}.$ ſtop: kw:

## PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

*O podnieſieniu liczby do Kwadratu i wyciągnieniu z niey pierwiaſtku kwadratowego.*

Lubo nauka, która ſię tu wykładać będzie, ma częſte używanie w wyższych rachunkach, bardziey iednak ieſt potrzebna w Geometryi. W naſtępuiących Rozdziałach, różne zdarzą ſię użycia iey okoliczności. Tam fundamenta, na których ſię zaſadza, iaśniey zrozumiane będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okazane, zwłaszcza, gdy ieszcze Algebra uczniom ieſt nieznaioma.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; ieſt to ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona. Okazać to można z Geometryi, w którey aby znaleść pole Kwadratu, trzeba rozmnożyć przez ſiebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.

Y tak dziewiąciu liczb pierwszych:

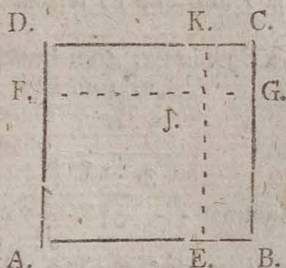
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
| Kwadraty są: | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. | 49. | 64. | 81. |
| Liczb: | 10. | 20. | 30. | 40. | 50. | 60. | 70. | 80. | 90. |
| Kwadraty są: | 100. | 400. | 900. | 1600. | 2500. | 3600. | 4900. | 6400. | 8100. |
| Tych też: | 1000. | 2000. | 3000. | - - | 9000. | | | | |
| Kwadraty będą. | 1000000. | 4000000. | 9000000. | - - - | 81000000. | | | | |

110. Ztąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, składaią się z kwadratu teyże samey cyfry, i z tyle dwoie następuiących zerów, ile ich było w tey liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37; mnoży się nayprzód 7. przez 7. to iest robi się Kwadrat z 7. potym mnoży się 30. przez 7, daley 7. przez 30. albo drugi raz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30. przez 30. to iest bierze się Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożona 1369. kwadratem trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydziestu, z liczby 30. rozmnożoney dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogulna ściągaiąca się do kwadratow liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech

Niech będzie naprzykład liczba 5. którą uważam iak złożoną z 1. i z 4. kwadrat iey może być uważany, iakby ſię ſkładał z tych trzech liczb: 1. 8. 16. Pierwsza 1. ieſt kwadratem z 1. druga 8. ieſt liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecia 16. ieſt kwadratem z 4. Jakoż ſumma tych trzech liczb 1. 8. 16. ieſt: 25. a 25. ieſt kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5. iako zbior z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5. brałby ſię tym ſamym za ſummę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. która ſumma ieſt także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2, liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.




Toż ſamo widocznie pokazać ſię może ſpoſobem Geometrycznym.

Niech liniia AB będzie na mieyſce liczby iakiey ſkładaiącey ſię z tylu iedności, ile pewnych części zamyka w ſobie taż linia AB. Linii tey części: AE, EB, niech zaſtępuią części dwie, które tę liczbę ſkładaią; zrobmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy

wszy liniią AF równą AE, pociągniymy przez F i E dwie linie FG, i EK, równoodległe od boków kwadratu, i przecinaiące ſię w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE. linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii teyże AB. Proſtokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, to ieſt z części iedney, linii AB i z części drugiey.

112. Wygodna rzecz ieſt, liczbę, którey kwadratu ſzukamy rozłożyć na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d.

*Przykład* 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dzieſiątki, i na iedności, to ieſt na 20. i na 4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Będzie | 1. | 400. | kwadrat z dzieſiątków. |
| | 2. | 160. | liczba dwa razy rozmnożona z dzieſiątków przez iedności. |
| | 3. | 16. | Kwadrat z iedności. |
| Summa - - | | 576. | Kwadrat z 24. |

*Przykład* 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1. | 900. | Kwadrat z 30. |
| | 2. | 360. | dwa razy 30. przez 6. rozmnożone. |
| | 3. | 36. | Kwadrat z 6. |
| Summa - - | | 1296. | Kwadrat z 36. |

*Przy-*

*Przykład* 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1. 90000. Kwadrat z 300.
2. 12000. Dwa razy 300. przez 20.
3. 400. Kwadrat z 20.
4. 2560. Dwa razy 320. przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa - - - 104976. Kwadrat z 324.

*Przykład* 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1. 16000000. Kwadrat z 4000.
2. 4800000. Dwa razy 4000. przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 736000. Dwa razy 4600. przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680. przez 7.
7. - - 49. Kwadrati z 7.

Summa - - - 21967969. Kwadrat z 4687.

113. *Uwaga* 1. Postrzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składaiąca po części kwadrat cały, ma iednym zero mniey, niżeli ta, która ią poprzedziła; a zatym cyfra iedna w każdey liczbie niższey występuie bardziey ku prawey ręce, niż w tey, która iest nad nią.

Wi-

Widziemy zatym, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry same tym sposobem iedne pod drugiemi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziey wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiem szłyby same cyfry.

```
16.
 48.
  36.
  736.
    64.
  6552.
     49.
---------
Summa 21967969.
```

2. W pierwszym rzędzie, gdzie iest 16. opuszczaiąc zerów sześć, a zatym 16. znaczy 16. millionow, to iest Kwadrat z 4000. czyli z pierwszego po lewey ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48. opuszcza się zerów pięć, a zatym 48. znaczy 4. milliony 8. krócś sto tysięcy, i dla tego 4. piszą się pod iednościami millionow, a 8. występuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia pierwszego po lewey ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, teyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcza się zerów cztery, a zatym 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dziedzie-

ſiątków tyſięcy, i dla tego 3. piszą ſię pod ſtema tyſiąców, a 6. wyſtępuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewey ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszczą ſię zerów trzy, a zatym 736. znaczy ſiedmkroć trzydzieści ſześć tyſięcy; i dla tego 3. piszą ſię pod dzieſiątkami tyſiąców, a 6. wyſtępuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożenia dwóch pierwszych po lewey ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak teyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowym liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, to ieſt zaczynaiąc od 49; w pierwszym rzędzie, pierwsza po prawey ręce cyfra 9. znaczy iedności; w drugim rzędzie 2. znaczy dzieſiątki; w trzecim rzędzie 4. znaczy ſta, w czwartym rzędzie 6. znaczy tyſiące i t. d.

4. Ta ſama liczba 49. w pierwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawa iey cyfra 9. naybardziey wyſtępuie. Trzecia w tym porządku liczba 64. ieſt kwadratem z dzieſiątków 8, i przeto prawa iey cyfra 4, iako znacząca ſta, mniey wyſtępuie, niżeli obydwie cyfry 49. kwadratu z ſamych iedności. Piąta w porządku liczba 36. ieſt kwadratem ze

ſtow

ſtow 6; i przeto prawa iey cyfra 6. iako znacząca dzieſiątki tyſiącow, ma przed ſobą kwadraty z dzieſiątków i z iedności. Nakoniec ſiódma i naywyższa liczba 16. ieſt kwadratem z tyſiąców 4. i przeto prawa iey cyfra 6. ma przed ſobą kwadraty ze ſtow, dzieſiątków i iedności. W ſummie więc 21,967,969. na mieyſcach nie parzyſtych, od prawey ręki rachuiąc kończyć ſię będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których ſię ſkłada cały kwadrat; to ieſt kwadrat z iedności kończyć ſię będzie tam, gdzie oſtatnie po prawey ręce 9. napisane; kwadrat z dzieſiątków tam, gdzie ieſt drugie 9; kwadrat ze ſtów tam, gdzie ieſt 6; kwadrat z tyſiąców, gdzie 1.

5. Dla podobney przyczyny w ſummie teyże 21,967,969. kwadrat wyrażaiącey (rachuiąc zawsze od prawey ręki) na mieyscach parzyſtych, drugim, czwartym, ſzóſtym i t. d. kończyć ſię będą liczby pochodzące z rozmnożenia poiedyńczych znaków, z których kwadrat uroſt, przez te wſzyſtkie, które ie poprzedzały.

Trzeba to ieſzcze bardziey obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże ſamym co wyżey porządkiem części ich układaiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mamy liczbę iaką kwadratową, możemy doyść z iak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urosł ten kwadrat; to iest możemy doyść wielości znaków pierwiastku kwadratowego. Po łacinie taki pierwiastek zowie się (Radix quadrata.) Doydziemy zaś tego, oddzielaiąc kreskami albo kropkami od prawey ręki zacząwszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokaże wielość znaków liczebnych pierwiastku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5,76. a zatym pierwiastek iey z dwóch się składa znaków. Pierwiastek tey liczby: 10.49,76. będzie miał trzy znaki liczebne, bo w niey trzy oddziały zrobić można. Pierwiastek liczby 21,96,79,69. mieć będzie cztery znaki, bo cztery także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nie parzystych liczby kwadratowey, kończą kwadraty znaków poiedynczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie być nie parzyste; więc w takim razie; w pierwszym zaraz od lewey ręki znaku kwadratu, znaleść można znak pierwszy pierwiastku tegoż kwadratu; a zatym oddzielaiąc kreskami co dwie liczby, od prawey ręki do le-

wey,

wey, na oſtatni oddział, może tylko przypaść znak iedeu liczebny. Tak iak wyżey widzieliśmy w tym kwadracie 5,76.

## PRZYKŁADY.

116. Niechby z tey samey liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiaſtek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiaſtku, to ieſt znak dzieſiątków, i znak iedności. Pierwszy znak pierwiaſtku taki być powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. ſtów; taki kwadrat ieſt 4. ſta, albo 400, którego pierwiaſtek, 2. dzieſiątki, albo 20. Kwadrat 400, pierwszego tego znaku pierwiaſtkowego 20, odiąwszy od 576. zoſtanie 176. Ta reszta pozoſtała powinna ieszcze zamykać w ſobie drugi znak pierwiaſtku rozmnożony przez pierwszy 20, dwa razy wzięty, i nadto kwadrat tegoż drugiego znaku; więc ieżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, to ieſt przez 40 podzielemy resztę 176, wieloraz pokaże drugi znak pierwiaſtku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160. odiąwszy od 176. zoſtanie 16. W tey reszcie 16. znaydować ſię ieszcze powinien.

nien kwadrat znaku pierwiaſtkowego iedności 4. to ieſt 16. a że ſię znayduie zupełnie, więc cały pierwiaſtek kwadratu 576. będzie: 24.

*Wzór działania.*

5,76|20.
4 00 kwadrat z 20.

40|176|4.
|160 z rozmnożenia 40 przez 4.

16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.

0.

Tymże ſpoſobem wyciągnąć można pierwiaſtek kwadratowy z tey liczby 144.

*Wzór działania.*

1,44|10.
1 00 kwadrat z 10.

20|44|2
|40 z rozmnożenia 20. przez 2.

4. Reſzta
4. Kwadrat z 2.

0.

Niechby potrzeba wyciągnąć pierwiaſtek, z kwadratu: 692224.

Oddzieliwſzy iak wyżey kreſkami co dwie liczby od prawey ręki, będzie trzy oddziałow, a zatym i trzy znaki w pierwiaſtku. Kwadrat naybliżey przyſtępuiący do 69. ieſt 64, którego pierwiaſtek ieſt 8; więc 8 ſtów, będzie znakiem pierwſzym pierwiaſtku. Odiąwſzy kwadrat 8 ſtów, to ieſt 640000. od 692224, zoſtanie 52224. Ta reſzta powinna zamykać pierwſzy znak 800 pierwiaſtku dwa razy wzięty, przez drugi znak dzieſiątkow rozmnożony; i kwadrat drugiego znaku pierwiaſtku; powinna ieſzcze zamykać dwa te pierwſze znaki ſtów i dzieſiątkow rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. W ſzczegulności zaś mówiąc, powinna zamykać 800, dwa razy wzięte, to ieſt 1600. rozmnożone przez znak dzieſiątkow, którego ſzukamy. Podzieliwſzy tedy 52224, przez 1600. znaydziemy na wieloraz 30, albo 3 dzieſiątki; a zatym 3 dzieſiątki będą znakiem drugim Pierwiaſtku. 1600. rozmnożone przez 30, czynią 48000, które od 52224 odiąwſzy, zoſtanie 4224. Ta reſzta ma ieſzcze zamykać kwadrat z 30, to ieſt 900, które 900. od 4224 odiąwſzy, zoſtanie 3324,

Ta reſzta powinna zamykać część pierwiaſtku znalezioną 830, dwa razy wzię-
tą,

tą, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiaſtku, i ieſzcze zamykać powinna kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3324 przez 1660, to ieſt przez 830 dwa razy wzięte, a wieloraz 2. będzie znakiem iedności pierwiaſtku. Przez te 2. rozmnożywſzy 1660, i liczbę rożmnożoną: 3320, odiąwſzy od 3324, zoſtanie 4, która to reſzta ieſt kwadratem z 2 iedności. Cały więc pierwiaſtek kwadratu: 692224, będzie 832.

*Wzór działania.*

```
        69,22,24.|800
        64 00 00
1600.| 5 22 24|30
       4 80 00
         42 24
          9 00
1600 |33 24|2
      33 20
          4
          4
          0.
```

Trzeba iako naywięcey takich przykładow Uczniom podawać, nieużywaiąc żadnego ieſzcze ſkrócenia. Na wzór dwa naſtępuiące przykłady podaią ſię.

*Przykład I.*

```
       46,02,26,56 | 6000.
       36 00 00 00 |
12000 | 10 02 26 56 | 700.
        8 40 00 00
        1 62 26 56
          49 00 00
13400 | 1 13 26 56 | 80
        1 07 20 00
           6 06 56
             64 00
13560 | 5 42 56    | 4
        5 42 40
             16
             16
              0.
```

*Przykład II.*

```
       13,59,39,69 | 3000
        9 00 00 00
6000 | 4 59 39 69 | 600.
       3 60 00 00
         99 39 69
         36 00 00
7200 | 63 39 69 | 80
       57 60 00 |
        5 79 69
          64 00
7360 | 5 15 69 | 7.
       5 15 20
            49
            49
             0.
```

117. *Uwaga.* Jako w dzieleniu zwyczaynym, tak i w wyciąganiu Pierwiaſtku kwadratowego, można ſię (kto ieſzcze nie ieſt wprawnym) łatwo pomylić w znakach wielorazu. Omyłka w dzieleniu łatwa ieſt do poprawienia, gdy uważać będziemy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożona przez wieloraz odiąć ſię może od części liczby podzieloney, którą dzielić przypada, albo ieżeli reſzta nie ieſt większa

od

od liczby dzielącey. W wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego, (które wychodzi na iedno prawie co i dzielenie, w którymby liczba dzieląca co raz się odmieniała) można także omyłkę iakąkolwiek postrzedz podobną, iak przy zwyczaynym dzieleniu, czyniąc uwagę; wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc pierwiastek sposobem wyżey podanym, dwa się czynią odeymowania; to iest odeymuie się nayprzod liczba dzieląca przez część przypadaiącą Pierwiastku rozmnożona, i powtóre odeymuie się kwadrat teyże części Pierwiastku; więc, gdyby zdarzyło się, że pierwsze tylko odięcie uczynić można, a drugiego iuż niemożna; ostrzeżeni tym bylibyśmy, żeśmy wzieli wieloraz bardzo wielki, a zatym zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w pierwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim, 6000, mogło się znaydować 700 razy w 4593969; ale nie możnaby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów; i przeto w obydwóch tych przykładach iednością wieloraz zmnieyszyliśmy.

118. *Pierwsze* skrócenie, którego przy wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego użyć można, iest w opuszczeniu zerów w liczbie dzielącey, podzielney, i w wielorazie,

razie, zachowuiąc iednak cyfrom pozostałym te mieysca, któreby zastępować powinny, gdyby zera odcięte niebyły.

119. *Powtore*. Ponieważ ostatnie po prawey ręce znaki kwadratu podanego do wyciągania Pierwiastku, cale się nieodmieniaią. Po pierwszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebne; a zatym do każdego wszczegulności odeymowania, można te tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypada liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożoną; zachowuiąc im mieysce i znaczenie to samo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecie*. Zamiast dwóch odeymowań, nayprzod liczby dzielącey przez wieloraz rozmnożoney, potym kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razem czynić odeymowania: kładąc znak znaleziony na wieloraz, nie tylko na zwyczaynym swoim mieyscu, ale też przy końcu liczby dzielącey, i dopiero tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez ten znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypadaiących z kwadratu, odeymować.

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których iuż uczniowie wyciągali pierwiastek, niechay użyią tych trzech

sposo-

ſpoſobów ſkrócenia; bo im iuż i działanie będzie łatwieyſze, i lepiey dokładność tego ſpoſobu ſkróconego obaczą, porownywaiąc działanie pierwſze z drugim.

121. Wyciągniymy tym ſkróconym ſpoſobem pierwiaſtek kwadratowy z liczby 13593969.

Nayprzód odzielić trzeba kreſkami co dwie liczby, iak wyżey; oddzieliwſzy tak liczby kwadratu podanego 13.59,39,69, widziemy, że ten kwadrat cztery znaki liczebne mieć będzie w ſwoim Pierwiaſtku. Kwadrat naybliżſzy w pierwſzym po prawey ręce oddziale zawarty, będzie 9, którego Pierwiaſtek, 3. znaczący tyſiące. Odiąwſzy ten kwadrat 9, od 13. zoſtanie 4, do których przypiſawſzy oddział naſtępuiący: 59, będzie 459. Podwoymy pierwſzy znak Pierwiaſtku 3, i będzie 6. Te 6, w pierwſzych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby ſię razy 7, ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu niemógłby ſię potym odiąć, połóżmy tylko 6, na mieyſcu wielorazu, i przypiſzmy ie także do 6. liczby dzielącey. Rozmnożywſzy 66. przez 6, i liczbę rozmnożoną 396, odiąwſzy od 459, zoſtanie 63, do którey reſzty przypiſzmy oddział kwadratu naſtępuiący 39; i dzielmy daley 6339, przez

przez dwa znaki Pierwiaſtku znalezione, 36, podwoiwſzy ie; to ieſt przez 72. 72 w 633 znayduie ſię razy 8. Napiſzmy 8. na wieloraz, i przypiſzmy ie do liczby dzielącey 72. Rozmnożywſzy 728, przez 8, będzie 5824, które odiąwſzy od: 6339. zoſtanie 515. Dopiſzmy do tey reſzty, oſtatni kwadratu oddział 69; i 51569. dzielmy przez podwóyną liczbę znakow Pierwiaſtku iuż znalezionych 368; to ieſt przez 736. 736 w 5156 znaydziemy razy 7. Przypiſzmy te 7. do 368, i do 736. Rozmnożywſzy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwſzy od 51569 nic nie zoſtanie; a zatym kwadratu podanego pierwiaſtek będzie: 3687.

*Wzór działania.*

```
        13,59,39,69|3687.
         9
       66|4 5,9
          3 9 6
      728|6 3 3,9
          5 8 2 4
    7367.|5 1 56,9
          5 1 56 9
             o.
```

122.

122 *Wniosek.* Ponieważ wyniesienie iakiey liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożenie tey liczby przez siebie samę, czyli rozmnożenie dwoch liczb rownych iedney przez drugi kwadrat więc ułomku iakiego, będzie ułomek, ktorego licznik, iest kwadratem licznika tamtego, a mianownik kwadratem mianownika iego. Y tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$, kwadrat z $\frac{1}{3}$, iest $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$; kwadraty ułomkow $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$, są $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$. y. t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułomka podanego, trzeba osobno wyciągnąć go, z licznika i z mianownika. Y tak Pierwiastki kwadratowe tych ułomkow; $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t.d. są $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. i t.d.

123. *Uwaga.* Gdy się trafi wyciągać Pierwiastek kwadratowy z liczby mieszaney, to iest złożoney z liczby całkowitey, i z ułomka; trzeba ią pierwey obrocić na sam ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z 2. $\frac{1}{4}$, liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$, ktorego pierwiastek

wiaſtek $\frac{3}{2}$, czyli 1 $\frac{1}{2}$, Liczba też: 2 $\frac{7}{9}$, ieſt iedno co $\frac{25}{9}$, a zatym pierwiaſtek iey $\frac{5}{3}$, czyli: 1 $\frac{2}{3}$, Liczba 10 $\frac{6}{25}$, tyle znaczy co $\frac{256}{25}$. więc pierwiaſtek iey: $\frac{16}{5}$. czyli 3 $\frac{1}{5}$.

O Ilościach nieſpołmiernych, i przybliżeniu Pierwiaſtków tych liczb, które nie ſą kwadratami.

124. *Uwagi. 1.* Niech będzie liczba 2. z którey przypada wyciągać Pierwiaſtek kwadratowy. Pierwiaſtkiem tey liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1, ieſt 1; mniey od 2, a kwadrat z 2, ieſt 4. więcey od 2. Więc Pierwiaſtek z 2, będzie między 1. i 2, a zatym będzie złożonym z iedności, i z ułomka; to ieſt: będzie liczbą mieſzaną, którą na ſam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym Pierwiaſtkiem z 2, trzebaby, aby kwadrat iego rownał ſię 2; a zatym aby kwadrat licznika iego był dwa razy więkſzy od kwadratu mianownika. Znaleśćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w ſobie zamykał inny kwadrat; aże to ieſt niepodobna, zaraz ſię pokaże. Każda

Każda liczba kończyć się musi na ieden z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczey kończyć się niemoże, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiero wyrażonych, to iest na:

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0.

czyli krócey, na 1, 4, 9, 6, 5, 0.

Kwadraty podwoione niemogą się inaczey kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratow ostatnie, podwoione; to iest, na: 2,8,8,2,0,0; czyli krócey na: 2,8,0. A że pierwsze zakończenia na: 2,8, nie są zakończeniami kwadratów; więc kwadraty podwoione, liczb zakończonych na: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, niemogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończona iest na iedno zero, to iest ieżeli ieden lub więcey dziesiątków w sobie zupełnie zamyka, kwadrat iey zamykać będzie takąż liczbę stów, a zatym kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącey się na 5, kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50; więc tak podwoiony nie będzie kwadratem.

Nako-

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na ieden z dziewięciu pierwszych znakow: 1,2,3.4,5.6,7,8,9; a kwadrat iey, 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8,0, a pierwiastek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiastek liczby zekończoney na ieden z tych trzech znakow: 2,8,0; który to ostatni pierwiastek wyciągniony bydź niemoże, iakośmy iuż okazali. Tego samego rozumowania użyć można, gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w szczegulności mówiąc, Pierwiastek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź niemoże.

126. To Dowodzenie stosowane bydź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. Y tak nie można wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32, 42, 52, 62, i t. d: czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach mieszanych.

127. Podobnie dowieść można, że niepobo-

podobna znaleść pierwiaſtek kwadratowy liczby 3, ani żadney inney na 3. kończącey ſię. Tym co wyżey ſpoſobem dowodzi ſię niepodobność wyciągnienia Pierwiaſtku kwadratowego z liczb kończących ſię na 5, 7, i t. d; a z tąd możnaby ułożyć Tablicę bardzo obſzerną liczb takich, ktorych Pierwiaſtki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łamanych, zupełnie wyciągnione bydź niemogą.

128. Możnaby iednak i ogulnie dowieść, że wſzyſtkie liczby całkowite, które nie maią Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych, mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie ſię tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby ſą *pierwſzemi* iedna względem drugiey, (obacz w Arytmetyce na karcie 192.) ich kwadraty pierwſzemi też będą ieden względem drugiego; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Pierwiaſtków.

Y tak, że liczby 2, y 3, ſą między ſobą *pierwſzemi*; pierwſzemi ſą także między ſobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3. i 5. ſą między ſobą pierwſzemi, podobnież pierwſzemi dędą i ich kwadraty: 9. 25, Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby ſą

pierwſze-

pierwſzemi między ſobą, ich kwadraty niebędą wielokrotne, ieden drugiego; to ieſt: ieden kwadrat niebędzie zupełnie w ſobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaka całkowita, którey nie można mieć Pierwiaſtku kwadratowego w liczbach całkowitych. Gdyby ten Pierwiaſtek można zupełnie okazać w liczbie mieſzaney, ta liczba mieſzana, dałaby ſię obrócić na ſam ułomek, a ułomek ten możnaby przywieść do nayprościeyſzych wyrazow. Ale aby tenże ułomek wyrażał zupełny Pierwiaſtek, trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatym, aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co ieſt nie podobna; więc gdy liczbie iakiey całkowitey, nie można zupełnie znaleść pierwiaſtku kwadratowego w liczbie całkowitey, nie można go też znaleść ani w ułomku.

129. Są więc takie niektóre Ilości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie bydź wyrażone nie mogą; ani nawet wyrazić można, iak ſię maią do iedności. Takie ſą te Ilości, które przez ſiebie ſame rozmnożone, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią ſię *nieſpołmiernemi* (Jncommenſurabiles, albo Jrrationales) Piſzą ſię naſtępuiącym ſpoſobem.

*V2*,

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. i t. d. Znak ten $\sqrt{}$, czyta ſię *Pierwiaſtek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{2}$, Pierwiaſtek dwóch, $\sqrt{3}$. Pierwiaſtek trzech i t. d.

130. Gdy mowię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nie można, przydaię zaraz, że ich dokładnie wyrazić niemożna w liczbach; bo w inny ſpoſob można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawſze naznaczyć dwie linije, któreby ſię miały między ſobą, jak 1, do Pierwiaſtku kwadratowego liczby podaney. Y tak Przekątna kwadratu, ma ſię do boku iednego, iak ſię ma Pierwiaſtek kwadratowy z 2, do 1, albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wyſokość także Troykąta równobocznego, tak ſię ma do połowy Podſtawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131. Lobo w liczbach niemożna dokładnie wyrazić Ilości nieſpołmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwey, i uchybienie zmnieyſzyć tyle, ile zechcemy. Spoſób do tego nayſnadnieyſzy ieſt przez użycie znaków *Dzieſiątnych* do wyrażenia takich Ilości.

Niech będzie podana liczba 2, aby wyciągnąć z niey Pierwiaſtek kwadratowi przez *przybliżenie* (per approximationem.)

Gdyby

Gdyby liczba podana była razy 100, 10000. 1000000, i t. d. większa iey pierwiaſtek byłby też większy razy 10, 100, 1000 i t. d. tak dalece, że wyciągnąwſzy pierwiaſtek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby pierwiaſtek ten dzielić przez 10, 100, 1000, y t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dzieſiątych, ſetnych, tyſiącznych i t. d. Przeto Pierwiaſtek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząſtek tyſiącznych, znaydzie ſię wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Pierwiaſtek naybliżſzy z liczby 2000000 wyciągniony ieſt: 1414. a pierwiaſtek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. ieſt, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414. ieſt 1,999396, i rożni ſię od 2, tylko 0,000604.

*Wzór działania.*

```
          2,00,00,00|1,414
          1
          ----
     24|10,0
         9 6
        ----
   281.|  40,0
          28 1
         -----
  2824|11 90,0
       11 29 6.
       --------
           60 4.
```

Gdyby-

Gdybyśmy chcieli ieſzcze bardziey przybliżyć do prawdziwego, ten Pierwiaſtek, naprzykład żeby ani w cząſtce $\frac{1}{10000}$, nie było uchybienia, trzebaby ieſzcze dwa zera przydać, aby mieć iednym znakiem więcey w pierwiaſtku.

132. Dla ſprawdzenia, czyliśmy w cząſtce $\frac{1}{1000}$ nieuchybili, można położyć zamiaſt pierwiaſtku znalezionego 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez ſiebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częſtokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągnąć można z liczby pierwiaſtek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Spoſob ten zaſadza ſię na tym, że ieżeli liczba ieſt złożona z dwóch części, z których iedna ieſt bardzo wielka względem drugiey; kwadrat tey liczby będzie prawie złożony z kwadratu części większey, i z podwoionego rozmnożenia części pierwſzey przez drugą; ponieważ kwadrat części mnieyſzey, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. Y tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzieloney na dwie części: 10, i 1. będzie równy 100, to ieſt kwadratowi z 10, przy-

dawſzy 10. przez 2 rozmnożone, to ieſt, 20, i kwadrat części mnieyſzey: 1; A choćby ten oſtatni kwadrat i opuścić, tedy iednak Summa 120, małoby ſię rożniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie z tąd, że maiąc liczbę, z którey przypada wyciągać Pierwiaſtek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga mała, ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy z niewielkim uchybieniem i część małą, podzieliwſzy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiey, przez tę ſamę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloraz wypadnie, trzeba przydać do wielkiey części, gdy liczba podana będzie większa od kwadratu części wielkiey; albo odiąć od części wielkiey, gdy kwadrat iey więkſzy będzie od liczby podaney.

Niech będzie podana do wyciągnienia Pierwiaſtku, liczba 5. Pierwiaſtek iey nayblizſzy w liczbie całkowitey, ieſt 2. którego kwadrat 4. Różnica między *tym* kwadratem i 5, ieſt: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to ieſt przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$ A zatym Pierwiaſtek liczby 5. nie wiele uchybiony, bę-

dzie 2, $\frac{1}{4}$ albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$ ieſt $\frac{81}{16}$, czyli 5 $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$. przez $\frac{9}{4}$. dwa razy wzięte, to ieſt przez $\frac{9}{2}$. wypadnie na wieloraz $\frac{1}{72}$. który odiąwſzy od $\frac{9}{4}$. czyli od 2, $\frac{1}{4}$. zoſtanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$, y ten będzie ieſzcze bardziey przybliżaiacy ſię do prawdziwego pierwiaſtek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ ieſt: $\frac{25921}{5184}$, czyli 5 $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżenie z tym, któreśmy mieli w ułomkach dzieſiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$. na ułomek dzieſiątny, a znaydziemy: 2,2361. i t. d. Pierwiaſtek zaś liczby 5, w ułomku dzieſiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatym różnica liczb w tym dwoiakim poſtępowaniu, wydałaby ſię dopiero w częściach dzieſięć tyſiącznych.

136. W pierwſzym poſtępowaniu, kładzie ſię zamiaſt liczby podaney, ułomek ze wſzyſtkim iey równy, którego dziel-

nik ieſt kwadratem z 10, z 100, z 1000. i t. d. Naprzykład zamiaſt 2, piſze ſię $\frac{200}{100}$, $\frac{20000}{10000}$. $\frac{2000000}{1000000}$. W drugim poſtępowaniu, ſzukamy ułomka bardzo bliſko równego liczbie podaney. Którego tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratem. Y tak liczba 2, ieſt prawie równa ułomkom: $\frac{9}{4}$, $\frac{49}{25}$. $\frac{100}{49}$, $\frac{289}{144}$. i t. d. Liczba 3, ieſt prawie równa ułomkom: $\frac{49}{16}$, $\frac{361}{121}$. i t. d. Znayduiemy zaś te ułomki, dwoiąc, troiąc i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowemi nie będzie która tuż zbliżaiąca ſię do liczby podwoiney potroioney, i t. d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4. czyni 8, a bliſko czyni kwadrat 9, więc 2. zupełnie rowna ſię $\frac{8}{4}$, a niedaleko ieſt od $\frac{9}{4}$; a zatym Pierwiaſtek z 2, będzie bliſko $\frac{3}{2}$, Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, rowna ſię $\frac{50}{25}$, a nie daleko ieſt od $\frac{49}{25}$; a zatym Pierwiaſtek z 2, będzie bliſko: $\frac{7}{5}$. Można potym poprawić, gdy zechcemy pierwſze te przybliżenia, poſtępuiąc ſobie tak, iak ſię wyżey powiedziało.

Do-

Dosyć będzie tym czasem na tey początkowey wiadomości względem przybliżania Pierwiastków nie spółmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiey wagi, gdy sławni Matematycy Euler i de la Grange, głębiey ią brać poczęli, i rozmaite iey przystosowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{2}{3}$, z którego trzeba wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Zamiast, cobyśmy mieli osobno ten Pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potym Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodniey będzie, ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiastek z licznika 6, a trzecia część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiem ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2,4494$; trzecia tego pierwiastku część iest prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0, 66666666. i t. d.



---

(m) *Obacz między innemi Dzieło pod Tytułem: Introductio ad analysym Infinitorum przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry Eulera po Francuzku wydane.*

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiaſtek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliżſzy ułomka $\frac{2}{3}$, ieſt 1. który różni ſię od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony to ieſt przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwſzy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zoſtanie $\frac{5}{6}$. kwadrat z $\frac{5}{6}$, ieſt $\frac{25}{36}$, który od $\frac{2}{3}$. różni ſię przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$. podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. to ieſt $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zoſtanie $\frac{49}{60}$. Y ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiaſtkiem bardzo bliſkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$. ieſt. $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$, znaczy tyle, co $\frac{2400}{3600}$; rożnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogulności mowiąc; aby Pierwiaſtek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratem, mnożąc, gdy inaczey być nie może licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potym pierwiaſtek z licznika tak rozmno-

żonego,

żonego, a przez mianownika nie rozmnożonego podzielić ten pierwiastek.

140. Może się iednak obeyść czasem bez mnożenia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samego mianownika; gdy mianownik iuż iest kwadratem, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $\frac{9}{4}$; wyciągniemy go z 3. i podzielemy przez 2; chcąc mieć pierwiastek z $\frac{5}{12}$, rozmnożemy 5, i 12, przez 3, a maiąc ztąd $\frac{15}{36}$; wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielemy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, to iest będzie $\frac{31}{8}$. więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$, będzie: $\frac{31}{48}$; kwadrat albowiem z $\frac{31}{48}$. iest: $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$, tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatym uchybienie iest tylko w $\frac{1}{2304}$.

RO-

# ROZDZIAŁ VI.

*O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury proſtokreślne.*

141. *DEfin:* W tróykącie proſtokątnym, bok przeciwny proſtemu kątowi, nazywać będziemy: Linią *Przeciwproſtokątną* albo iednym ſłowem: *Przeciwproſtokątną* (Hypothenuſa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwproſtokątney Troykąta proſtokątnego, równa ſię ſummie kwadratów z dwóch innych boków tegoż troykąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać nayprzod potrzeba na Tróykącie Proſtokątnym równo ramiennym, to ieſt maiącym dwa boki równe; dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątney kwadratu dwa razy ieſt od tegoż kwadratu większy.

*Tab. VIII. Fig. 2.* Niech będzie: ABCD, kwadrat, którego Przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, a CB, do F, tak, aby BE. i BF, równe były AB. Poprowadźmy Linie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratem przekątney AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Jakoż.

Jakoż cztery Troykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą Przyſtać do ſiebie; bo maią wſzyſtkie kąty przy B. proſte, i boki przy nich równe; a zatym linie AC, CE, EF, AF, będą wſzyſtkie równe. Każdy oprocz tego kąt w czworokącie ACEF, ieſt proſty, bo złożony z dwóch kątów poł proſtych, iak naprzykład kąt ACE, złożony ieſt z kątów pólproſtych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF ieſt proſtokątem maiącym boki wſzyſtkie równe, a przeto ieſt kwadratem. Ten kwadrat ACEF, ſkłada ſię z czterech Troykątów, z których każdy przyſtać może do iednego z dwóch Troykątów kwadratu ABCD. Że tedy takich Troykątów ieſt cztery w kwadracie ACEF, iakich ieſt dwa w kwadracie ABCD; kwadrat więc Przykątney AC, ieſt dwa razy większy od kwadratu tego, którego bokiem ieſt ta Przekątna.

143. *Wnioſek*: Aby dodać dwa kwadraty równe, trzeba zrobić Tróykąt proſtokątny równoramienny, którego boki przy kącie proſtym byłyby równe, bokowi iednego z dwoch kwadratów, a Przeciwproſtkątna tego Troykąta, będzie bokiem kwadratu równego ſummie dwóch tamtych kwadratów.

Można ieſzcze, nim ſię do ogulnego dowodzenia przyſtąpi, przytoczyć niektóre

które przypadki szczegulne, gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na Figurze 3.

Fig. 3. gdzie trzy boki Troykąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3, w częściach równych, naprzykład w całach; kwadraty tych liczb są, 25, 16, 9, całów kwadratowych; i pierwszy kwadrat równa się summie dwóch ostatnich.

## INNE PRZYKŁADY.

| *Przeciwprostkątne* | | | | *Boki.* |
|---|---|---|---|---|
| 13, | - | - | - | 12 - 5 |
| 17, | - | - | - | 15 - 8 |
| 25. | - | - | - | 24 - 7. |

Dowodzenie ogulne, które teraz damy, można obiaśnić na kwadratach z karty grubey wyrzniętych.

Fig. 4. Niech będą dwa iakiekolwiek kwadraty: ABCD. i AEFG; znaydziemy kwadrat równy ich summie w ten sposob. Postawmy nayprzod te kwadraty, ieden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD. i AG, stykały się, i iednę linią czyniły DG. Bok AG mnieyszego kwadratu, przeniesmy potym na bok AD. większego kwadratu od D, do J. Poprowadźmy linie IF, IC. Troykąty prostokątne IGF, CID. maią boki przyległe

kątowi

kątowi proſtemu równe bokom kwadratów obydwóch. Trzeba więc dowieść, że kwadrat przeciw proſtokątney IF, albo IC, równy ieſt ſummie kwadratów z GI. i GF, albo z DC. i DI. Wyrżnąwſzy kartę wzdłuż Linii IF. i IC, przyłóżmy, Troykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC. bok DI. przypadnie na BH. przedłużeniu boku AB; a to z tey przyczyny, że obadwa ſą kąty proſte D. i B; bok zatym trzeci IC. weźmie położenie HC; będzie więc Tróykąt CBH, równy Troykątowi CDI. Podobnie i drugiego Troykąta IGF, bok IG, przyſtanie zupełnie do boku HE, ſobie równego, ponieważ IG. równa ſię AD. AD, równa ſię AB, a AB. równa ſię HE; bok GF. przypadnie na równy ſobie bok EF: a IF, weźmie położenie HF, będzie więc Troykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który ſię zrobi z czterech przeciwproſtokątnych: CI, IF, FH. HC, będzie miał wſzyſtkie kąty proſte, bo kąt na przykład IFH, równa ſię ſummie kątów IFE, i EFH, które równie czynią kąt proſty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Ten więc czworokąt ieſt razem i proſtokątem maiącym wſzyſtkie boki równe, a zatym ieſt kwadratem; który to kwadrat rowna ſię ſummie dwóch kwadratów podanych, a zrobiony ieſt na Przekątney Troykąta proſtokątnego, maiącego za boki przyległe kątowi proſte-

mu

mu te ſame; które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzenie naſtępuiące powinno tym iaśniey być wyłożone, im prościey ieſzcze od pierwſzego tę prawdę okazuie; i więcey daie do czynienia dowcipowi. Wiele także użytecznych wnioſków z niego wypływa.

*Tab. IX. Fig. 1.* Niech będzie Troykąt ABC. proſtokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wyſtawmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE. równy będzie ſummie dwóch innych: ACGF. i BCHI.

Z wierzchołku kąta proſtego ſpuśćmy na przeciwproſtokątną AB; proſtopadłą CL, i przeciągniymy ią aż do boku ED, do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI równy ieſt Proſtokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Proſtokątowi AEML, a zatym obadwa razem kwadraty równe kwadratowi ABDE.

Pociągniymy linią CD; Troykąt BDC. będzie połową Równoległoboku proſtokątnego BDML; bo obadwa maią ſpolną

pod-

podſtawę BD, i na teyże ſamey równoodległey MC, ſą zakończone. (94.)

Pociągniymy linią AI; Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dla teyże, co wyżey przyczyny; bo obadwa także maią podſtawę ſpolną BI, i obadwa na iedney równoodległey AH. ſą zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że Troykąty ABI. CBD, ſą równe; iuż tym ſamym Proſtokąt BDML, równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy ſą równe, to i dwie te rzeczy będą równe.

Te dwa Troykaty mogą przyſtać do ſiebie; ponieważ bok AB. w iednym, równy ieſt bokowi BD, w drugim, bo obadwa te boki do iednego kwadratu należą; bok BI. w iednym, równy także ieſt bokowi BC, w drugim; kąty między temi bokami zawarte: ABI, CBD, ſkładaią ſię obadwa z kąta proſtego i z kąta ABC; więc te dwa Tróykąty ſą równe w powierzchniach; a zatym i kwadrat BCHI, równy będzie Proſtokątowi BDML. Tymże ſamym ſpoſobem dowodzi ſię, że kwadrat ACFG. równy ieſt Proſtokątowi AEML; to ieſt pociągnąwſzy linie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC. mogą przyſtać do ſiebie, a zatym będą równe; kwadrat

więc

więc ACFG, że ieſt dwa razy większy od Troykąta BAG, będzie równy Proſtokątowi AEML, dwa razy także większemu od Troykąta EAC. (n)

144. *Wnioſek.* Gdy od wierzchołka kąta proſtego, w Troykącie proſtokątnym ſpuſzczona będzie Proſtopadła na przeciwproſtkątną, kwadrat z boku iednego tego Tróykąta równy będzie Proſtokątowi zrobionemu z przeciwproſtkątney, i z od cinka uczynionego przez Proſtopadłą, a przy

---

(n) *Spoſób poſtępowania w tym dowodzeniu, może ſłużyć za wzór do innych dowodzeń przydłuzſzych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą oſobnośmy ſię obeſzli. W tych ſamych częściach były znowu uczynione nowe podziały, nie zawiſłe iedne od drugich, i każdy podział w ſzczegulności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone, ale w tedy dopiero, gdy były potrzebne. Ta oſtatnia uwaga powinna być między innemi na pamięci w dowodzeniu Twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem liniy prowadziło ſię na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom niedobrze ieſzcze w takowe działania wprawionym.*

przyległego temuż Troykąta bokowi, którego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, to iest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo AE. i z odcinku AL; to iest Prostokątowi AEML, iako się wyżey pokazało. Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to iest BCHI, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostkątney AB, albo BD, i z odcinka BL, to iest Prostokątowi BDML.

145 *Zagadn:* 1. Maiąc dane dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiem kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dawszy mu za iedno ramię bok mnieyszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakreślmy łuk koła, któryby przecinał ramię drugie kąta prostego, to przecięcie naznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby

Gdyby kwadraty dane były równe; rozwiązanie byłoby ieſzcze łatwieyſze.

*Przyſtoſowanie zagadnienia, poprzedzaiącego, do wynalezienia innych Kwadratów.*

146. Jużeśmy pokazali, że kwadrat Przekątney ieſt dwa razy większy od kwadratu, którego ieſt ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy ſummie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat; znalazłſzy nayprzod kwadrat podwoyny, możnaby mu przydać znowu kwadrat poiedynczy, ale też można i ieſzcze lepiey tak ſobie poſtąpić: Kwadrat potróyny ieſt różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu poiedyńczego. Zróbmyż więc Troykąt proſtokątny, którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwproſtkątną daymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Tróykącie będzie taki, iakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potroyny.

147. *Uwaga.* Troykąt Proſtokątny, którego Przeciw proſtkątna ieſt dwa razy tak wielka, iak ieſt wielkie ramię iedno kąta proſtego; ten, mowię, Troykąt dwa razy ieſt mnieyſzy od Troykąta równoboczne-

bocznego, którego połową podstawy byłoby ramie iedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością iego; a zatym, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większey od boku tego kwadratu zrobić Troykąt Równoboczny, a wysokość tego Troykąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztery razy większy kwadrat od tego, który iest dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego, trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona; iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwprostkątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego, trzeba albo dodać do siebie kwadrat poczworny i podwoyny; albo też kwadrat podwóyny potroić, poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Troykąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat ſiedm razy większy od danego, trzeba dodać kwadrat poczworny i potróyny, dawſzy kąt proſty między bokami tych dwóch kwadratów; a na przeciwproſtkątney kwadrat poſtawiwſzy; ten będzie ſiedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego, trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztery razy pomnożyć, dawſzy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; albo też zrobić kwadrat równy Rożnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; poſtawiwſzy na ten koniec Troykąt proſtokątny, któremu za ramie iedno przy kącie proſtym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwproſtkątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypądnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego, trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dzieſięć razy większy od podanego; trzeba wziąść ſum-

mę

mę kwadratów: podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego, trzeba wziąść summę kwadratów: dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak iest podany.

156. Aby zróbić kwadrat dwanaście razy większy od podanego, trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy większy od podanego; trzeba wziąść summę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego niż iest kwadrat podany; albo też postawić Troykąt prostokątny i dać dwa ramiona, iedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwprostkątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy większego od podanego i t. d.

158. Wniosek z zagadnienia poprzedzaiącego; że kwadrat ramienia iednego przy kącie prostym, równy iest Prostokątowi i z odcinka-iey przyległego temuż ramionowi, przez prostopadłą zrobionego; ten mówię wniosek daie sposob ogulnieyszy, a czasem i prostszy rozwiązania

zania zagadnień w przyſtoſowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciwproſtkątna ieſt dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielka, iak odcinek przyległy iednemu bokowi; proſtokąt z tey przeciwproſtkątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t.d. razy tak wielki, iak kwadrat tego ſamego odcinka; a zatym, i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego odcinka, co iaſno być powinno, maiąc w pamięci to, co ſię powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i naſtępuiących o mierzeniu Proſtokątów, a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanie przybrane* (Lemma). (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okręgu koła, poprowadzone będą dwie linie do dwóch końców ſrednicy; kąt przy tym punkcie zròbiony, i zawarty między dwiema temi liniiami będzie proſty.

Niech

---

(o) *Lemma nazywamy podaniem przybranym, że nie należy właściwie do tey rzeczy, o którey mowa, i że ſię przybiera czaſem z inney części Matematyki dla przyſpoſobienia nas do łatwieyſzego zrozumienia tego, co naſtępuie.*

Niech będzie AKB. połkole, którego AB, ieſt średnią. Weźmy iakikolwiek punkt naprzykład K, na okrągu tego półkola, i poprowadźmy od tego punktu linije AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie linije ieſt proſty. Fig. 2.

*Przygotowanie.* Pociągniymy promień CK.

*Dowdz.* Troykąt AKC. ieſt równoramienny, bo AC, równa ſię CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokom ſtoiące będą równe; toż mówić i o Tróykącie CKB; a zatym w Troykącie AKB. kąt przy K. będzie równy ſummie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proſte, więc ſam przez ſię będzie czynił kąt ieden proſty.

160. *Zagadn:* 2. Znaleść kwadrat, który by kilka całe razy, lub wiecey zamykał w ſobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyka tyle razy w ſobie AB, ile razy kwadrat którego ſzukamy, ma w ſobie zamykać ten, który ieſt dany. Na AC, iako na średnicy nakreślmy połkole. Od punktu B. wyprowadźmy proſtopadłą BD, przecinaiącą połkole w Punkcie K. Linia AK, będzie ſłużyła za bok kwadratowi żądanemu. Fig. 3.

161. *Uwaga.* Trzeba tu pokazać widocznie

nie Uczniom pożyteczność większą i ogulnieyszą Geometryi, niżeli Arytmetyki; ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb całych, które są podwoyne, potróyne, poszostne i t. d. innych liczb kwadratowych. I tak nie można nawet w ułomkach znaleść Pierwiastku kwadratowego liczb 2,3,5,6, i t. d; a w Geometryi, iako się pokazało, znayduiemy i wyznaczamy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszostnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczeniu pierwszych ilości, których kwadraty byłyby podwoyne, potróyne, i t. d. innych kwadratów, nie iest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

*Rozwiąz.* Na większy bok Prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszego, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszego schodził się z końcem iednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy nakreślmy połkole, a do końca drugiego boku mnieyszego nieschodzącego się z końcem drugim

gim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia teyże Prostopadłey z połkolem, poprowadźmy linią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem mnieyszym Prostokąta. Ta ostatnia linia będzie bokiem kwadratu równego Prostokątowi.

164. *Wniosek*. Widzieliśmy w Rozdziale V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na Prostokąt. Teraz się pokazało, iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat; więc każda Figura Prostokreślna, może być i na kwadrat zamieniona.

W Troykącie maiącym kąt ieden roztwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków; mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnego kątowi ostremu od summy kwadratów dwóch innych boków w iednymże Troykącie.

Dwa następuiące Twierdzenia, pokażą Rożnicę w Troykącie między kwadratem boku tak przeciwnego kątowi roztwartemu, iako i przeciwnego kątowi ostremu, i kwadratowi dwoch innych boków.

165. *Twierdz.* 2. W Troykącie maiącym kąt roztwarty, ſpuściwſzy proſtopadłą od iednego końca boku przeciwnego kątowi roztwartemu, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtego boku, będzie równy ſummie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z boku, na który proſtopadła ſpuſzczona, rozmnożonego przez odległość od teyże Proſtopadłey, wierzchołka kąta roztwartego.

Niech będzie Troykąt: ABC, który ma kąt roztwarty przy C. Od końca A, boku AB, przeciwnego temu kątowi, ſpuśćmy na BC, proſtopadłą AD. Kwadrat z AB, równy będzie ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC, przez CD.

*Przygotowanie.* Na linii BD. zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, rowne BC; poprowadźmy przez G, i L, liniie GI. i LC.

*Dowodz.* Proſtokąt FGKL, ieſt kwadratem z BC; Proſtokąt CDIK, ieſt kwadratem z CD; a Proſtokąty obydwa BCKG. i EIKL, ſą z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, rowna ſię ſummie kwadratów

dratów z AD, i z BD; to ieſt ſummie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC, przez CD. A że ſumma kwadratów z AD. i DC, równa ieſt kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy ieſt ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Proſtokątowi z BC. przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Troykąt ACD był połową, Troykąta rownobocznego; to ieſt niechby linia AC była połową linii CD. Proſtokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby rowny Proſtokątowi BC, przez CA; a ſam przez ſię byłby tylko iego połową. Ten przypadek ſzczegulny można wyrazić w ſłowach naſtępuiących „ *W Troykącie, ktorego kąt roztwartu rowna ſię ſummie kąta proſtego i trzeciey części iego*; kwadrat boku przeciwnego kątowi roztwartemu, rowny ieſt ſummie kwadratów innych dwóch boków, i Proſtokątowi z tychże boków.

167. *Twierdz:* 3. W troykącie iakimkolwiek uważaiąc ieden kąt oſtry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi ſpuściwſzy proſtopadłą na iedno ramie iego; kwadrat tego boku równać ſię będzie różnicy między ſummą kwadratów ramion obydwóch kąta tego oſtrego, i dwa razy

wzię-

wziętym Proſtokątem z ramienia, na które proſtopadła ieſt ſpuſzczona, i z odległości wierzchołka kąta oſtrego od proſtopadłey.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC, w którym kąt C ieſt oſtry. Od końca A, boku przeciwnego AB, ſpuśćmy Proſtopadłą AD, na ramię BC, kąta oſtrego. Kwadrat z AB równy będzie różnicy między ſummą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Proſtokątem którego bokami będą BC, i CD.

*Przygotowanie.* Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznaczmy Liniie FG, FL, równe AB; i CI równą CD. Poprowadźmy ieſzcze liniie: DL, IG. Przeciągniymy DL i CE do M i N, tak, aby LM, EN równe były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Proſtokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

*Dowodz:* Kwadrat z AB równy ieſt ſummie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, to ieſt FGHL, równy ieſt kwadratowi BCEF, z BC, mniey ſummą dwoch proſtokątów: BGIC, i EIKL; albo dodawſzy, i odiąwſzy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy ſummie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniey ſummą

Pro-

Prostokątów BGIC, EIHL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summą Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatym kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i CD, równa się kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC. przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Troykąt AC D. był połową Troykąta rownobocznego, a zatym AC, dwa razy większa od CD; W takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątem z tychże boków AC; i BC. Co tak można wyrazić: *W Troykącie, którego kąt ieden równa się kątowi prostemu, mniey trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i Prostokątem z tychże ramion.*

169. *Wniośki i Przystosawania dwóch Twierdzeń ostatnich.*

1. Jeżeli w Troykącie kwadrat iednego

boku

boku równy ieſt ſummie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo większy lub mnieyſzy od tey ſummy; kąt też przeciwny będzie proſty, albo roztwarty, lub oſtry.

2. W każdym Troykącie, Proſtokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta iednego przy tym boku, od proſtopadłey ſpuſzczoney na tenże bok, z wierzchołka kąta iemu przeciwnego, ten mówię dwa razy wzięty Proſtokąt, równy ieſt różnicy między ſummą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratem boku przeciwnego temu kątowi; to ieſt równy będzią ſummie tych dwóch kwadratów, mniey kwadratem boku przeciwnego, gdy kąt ieſt oſtry; a gdy roztwarty, to ten Proſtokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniey ſummą kwadratów z ramion; a zatym ieżeli wiadome nam ſą w liczbach boki Troykątu: doydziemy ztąd w liczbach i proſtokąta tego podwoynego; doydziemy i odcinka (Segmentum) podſtawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym ieſt rzecz, i proſtopadłą. Aże kwadrat wyſokości Troykąta, równa ſię różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka, więc doy-

doydziemy i wyſokości Troykąta, a zatym i powierzchni iego.

170. *Przykład.* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC. w liczbach oznaczone: pierwſzy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, ieſt: 400.

Smma Kwadratów z BC. i AC, ieſt ſumma z 441, i z 169, to ieſt: 610.

Ta ſumma ponieważ ieſt większa, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, ieſt oſtry.

Różnica między tą ſummą i kwadratem z AB, ieſt: 210, która to różnica równa ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącey długość boku BC, rozmnożoney przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Ten Proſtokąt poiedynczy wyrazi ſię więc przez 105. Aże BC oznaczone ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa ſię różnicy między kwadratem z AC i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169, i 25; Ta różnica ieſt: 144, więc AD, będzie oznaczone przez 12. Powierzchnia Troykąta CAB, ieſt połową Proſtokątu z BC, przez AD; to ieſt 126.

171. *Przykład* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Sum-

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie ſumma z 121. i 169, to ieſt: 290.

Ta ſumma ponieważ ieſt mnieyſza od kwadratu z AB; przeto kąt przy C. będzie roztwarty.

Rożnica między tym kwadratem, i tą ſummą ieſt: 110; która to różnica rowna ſię podwoynemu Proſtokątowi z BC, przez CD, a zatym Poiedynczy Proſtokąt będzie = 55. A że BC. równa ſię 11; więc CD, będzie ſię równać: 5.

Kwadrat z AD, równa ſię różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD. będzie = 12; a powierzchnia Troykąta będzie 6. razy 11, to ieſt 66. Trzeba na więcey ieſzcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po większey części liczb takich, aby Pierwiaſtki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

| *Przykłady:* | *Boki* | *Podſtawa* |
|---|---|---|
| | 51 i 25 - | 52, albo 38 |
| | 52 i 29 - | 69 albo 27 |
| | 17 i 39 - | 44 albo 38 |
| | 68 i 87 - | 95 albo 31. |

172. *Przeſtroga* 1. Dla więkſzey wygody; używać na potym będziemy ſkróconych wyrażeń, których tu znaczenie wykładamy.

Znak ten: $=$ wyrażać będzie równość między dwoma ilościami.

Znak: $+$ gdzie iedna liniia proſto drugą przecina, wyrażać będzie dodanie iedney ilości do drugiey; i wymawia ſię tym ſłowem: *więcey* (plus) Naprzykład, $4 + 5 = 9$, wymawia ſię cztery więcey piącią, równa ſię dziewiącią.

Znak: $-$ wyrażać będzie odeymowanie iedney ilości od drugiey; i wymawia ſię tym ſłowem: *mniey*, (minus) Naprzykład: $7 - 4 = 3$; wymawia ſię: ſiedm mniey czterema, równa ſię trzem.

Dla oznaczenia rożmnożenia liczb, w Arytmetyce, albo Proſtokąta z dwóch linii w Geometryi, używać będziemy znaku: $\times$ to ieſt krzyża ukośnego. Naprzykład $4 \times 3$. znaczy cztery przez trzy rozmnożone, $AB \times CD$, znaczy Proſtokąt z linii AB, i CD; albo Proſtokąt z AB, przez CD. Dzielenie oznacza ſię tym znakiem: to ieſt dwiema kropkami, iedną pod drugą, które kładą ſię po ilości podzielney, a przed ilością dzielącą. Naprzykład $6 : 2$, znaczy 6, przez 2. podzielone. Można także dzielenie i ſpoſobem ułomków wyrażać kła-

kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiey ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobem zwykł się wyrażać $AB^2$, albo $AB^2$, częściey iednak pierwszym.

I tak pierwsze Twierdzenie można było w ten sposob wyrazić: - -

Fig. 1, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Fig. 4. Szoste $AB^2 = AC^2 + BC^2 + {}_2BC \times CD$

Fig. 5. Siodme $AB_2 = AC^2 + BC^2 - {}_2BC \times CD$

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przypadki, takby razem mogły być wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm {}_2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt iest prosty, liniia CD, a zatym i prostokąt $BC \times CD$. niknie.

173. *Przestroga* 2. Trzeba ostrzedz Uczniów, aby używaiąc tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stosuiące się do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także ustnie pierwey wyrazyć każde Twierdzenie lub zagadnienie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyraz skracaiącemi. I owszem lepieyby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełney wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu ustnym a iasnym Twierdzeń i Zagadnień im podanych.

ROZ-

# ROZDZIAŁ VII.

*O Liniiach ſtycznych z kołem; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki ſą między okręgiem, albo za okręgiem.*

174. DEfinicye. Koła równe ſą te, których promienie ſą równe; i takie koła przyſtać mogą do ſiebie.

Gdyby to podanie niezdawało ſię być tak oczywiſtym, aby go przypuścić można za Definicyą; tedy możnaby dowieść go tymże ſamym ſpoſobem, którym wyłożyliśmy w Rozdziale I. tworzenie ſię koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równe, obrotem ſwoim około iednego i nie poruſzonego końca, nię mogą zrobić, tylko równe dwa koła; albo też uważaiąc te dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiey, i iak gdyby obydwie razem czyniły ten obrot; w takim razie, iakiekolwiek będzie położenie ſpólne tych dwóch linii, ponieważ zawſze iedna do drugiey przyſtaie, więc i te mieyſca, które przeyść maią w tymże ſamym czaſie, i te, które iuż przeſzły w czaſach równych, rachuiąc od poczatku ich obrotu, przyſtałyby do ſiebie; a zatym i całe

te mieyſca, czyli koła, któreby zróbiły, mogłyby też do ſiebie przyſtać.

Końce tych dwóch linii tak ſię obracaiących, w czaſach równych, zrobiłyby łuki równe; a zatym w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykaią ſwemi ramionami łuki równe.

Wząiemnie gdy w równych kołach, równe łuki weźmiemy, kąty w środkach tych kół które między ramionami ſwemi zamykaią te łuki, będą równe.

*Tab. X. Fig. 1.* Nich będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wierzchołki ſwoie maią w środkach tych kół, i które zamykaią ſwemi ramionami te łuki, ſą też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyſzy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb; a zatym i łuki DB, ab, byłyby równe; ale że wzieliśmy za równe łuki AB i ab, więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co ieſt nie podobna, chyba żeby linie CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do ſiebie przyſtaiąc.

Część koła zawartą między dwoma pro-

promieniami i łukiem, zwać będziemi wycinkiem koła, (Sector Circuli.)

Z tego, co się wyżey powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przystać mogą do siebie, których kąty, albo łuki są równe; a wzaiemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe, maią też i cięciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach Troykąty równoramienne, złożone z cięciwy i z dwóch promieni, mogą przystać do siebie, dla równości promieni, i kątów w środku, które na równych łukach wspieraią się.

Wzaiemnie, ieżeli w kołach równych cięciwy są równe, łuki też równe będą; bo Troykąty złożone z tych cięciw, i z promieni równych, maiąc trzy boki równe, mogą przystać do siebie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promienie będą równe, a zatym i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziemy mieysce zawarte między łukiem i cięciwą.

Gdy cienciwa nie iest razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyszy od półkola. Takie dwa odcinki, nazywaią się odcinkami *na przemian* (Alterna.)

W dwoch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równe łuki, przystać do siebie mogą. Jakoż te odcinki są różnicami dwóch wycinków maiących równe łuki, od dwoch Troykątów, które za podstawy maią cienciwy tychże łuków równych.

Aże te wycinki mogą przystać do siebie, bo maią łuki równe; Troykąty mogą też do siebie przystać, bo maią wszystkie trzy boki równe.

Więc i dwa odcinki, przystać mogą do siebie, będąc różnicą dwoch Troykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszystko to, co się teraz powiedziało, trzeba przystosować do łuków, cienciw, wycinków, odcinków iednego koła.

Te podania powinnyby się wydawać oczywistemi, i nie potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z tey przyczyny są

bardzo

bardzo zdatne, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłomaczenie się iak naydokładnieyſze z tych nawet wyobrażeń, które im iuż wyſtawuią rzecz iaką doſyć iaśnie; i aby tym ſpoſobem wyobrażenia w ſobie proſte, prościeyſzemi ieſzcze czynić uczyli ſię.

175. *Twierd.* 1. Proſtopadła ciągniona od środka cienciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Linia proſta prowadzona od środka koła do środka cienciwy, ieſt do niey proſtopadłą.

3. Proſtopadła od środka koła ſpuſzczona na cienciwę, przypada na iey środek.

Niech będzie AB, cienciwa w kole, którego środek C, a promień CA. *Fig. 2.*

1. Proſtopadła od środka D. cienciwy wyſtawiona, przechodzi przez środek koła.

*Dowodz.* W tey proſtopadłey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od dwóch końców cienciwy; a że i środek koła iednakowo ieſt odległy od dwóch końców teyże cienciwy; więc będzie też znaydował ſię na tey proſtopadłey.

2. Li-

2. Linia CD, od środka koła poprowadzona do środka cienciwy, ieſt do niey proſtopadłą.

*Dowodz.* Troykąty: DCA, DCB, maią wſzyſtkie boki równe; więc mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności kąty przy D. ſą równe, a będąc kątami przyległemi, obadwa proſte być muſzą, a zatym liniia CD, ieſt proſtopadła do AB.

3. Proſtopadła CD, ſpuſzczona od środka koła na cienciwę AB, przypada na iey środek.

*Dowodz.* W Troykącie Rownoramiennym ACB, kąty A i B ſą równe; więc w Troykątach proſtokątnych: ACD, BCD, wſzyſtkie kąty równe będą iedne względem drugich; aże i boki AC, CB. ſą równe, więc te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie mogą, a w ſzczogulności liniie AD, i BD, ſą równe.

176. *Wnioſek.* Koło nie może mieć więcey, iak dwa punkta ſpolne z linią proſtą; bo gdyby mogło mieć więcey takich ſpolnych punktów, naprzykład trzy; złączywſzy iedną linią punkt pierwſzy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwſzy do tych dwoch linii dwie proſtopadłe, te uczyniłyby

ſyby Troykąt maiący dwa kąty proſte, co ieſt nie podobna.

177. *Zagad.* 1. Maiąc dane trzy punkta, których położenie nie ieſt w linii proſtey; nakryślić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

*Rozwiąz.* Ponieważ środek koła powinien ſię znaydować na każdey proſtopadłey poprowadzoney od środka linii łączącey dwa punkta znayduiące ſię w końcu; ieżeli tedy pierwſzy z punktów danych złączemy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadziemy Proſtopadłe; te przetną ſię w punkcie, który będzie środkiem koła maiącego przechodzić przez trzy punkta dane.

178. *Przyſtoſowanie.* Znaleść środek koła danego.

*Rozwią.* Na okrągu koła, weźmy trzy iakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzaiące zagadnienie ſzukaymy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wnioſek.* Ponieważ proſtopadłe wyſtawione na środku dwóch linii łączących punkt ieden dany z dwoma inne-

mi,

mi, nie mogą ſię przecinać tylko w iednym punkcie; więc nie może być więcey iak iedno koło przechodzące przez te trzy punkta; albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez te trzy punkta, toby nie były tylko iednym w rzeczy ſamey kołem; a zatym gdy dwa koła ſię przecinaią, nie więcey mogą mieć iak dwa punkta ſpólne w przecięciach. Ta własność koła, że ie z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wſzyſtkie iego promienie ſą równe; różni koło od wſzyſtkich krzywych Linii; podobnie iako Liniia proſta rożni ſię przeto od krzywych linii, że doſyć ieſt mieć dwa punkta dane, aby ią wyznaczyć.

180 *Twierdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwſzy Proſtopadłą do tegoż promienia; wſzyſtkie inne punkta tey proſtopadłey będą za kołem.

*Dowodz:* Odległością któregokolwiek z tych innych punktów, od środku koła, ieſt przeciwproſtkątna Troykąta, którego bokiem iednym ieſt promień koła; a że przeciwproſtkątna większa ieſt od iednego z boków Troykąta; więc i odległość od środka koła, punktu któregokolwiek na proſtopadłey, oprócz tego, któ-

który ieſt końcem promienia, więſza ieſt od tegoż promienia; a zatym każdy z tych punktów będzie za kołem.

181. *Defin.* Gdy proſta linia ieden tylko ma punkt ſpolny z okrągiem koła, taka linia nazywa ſię ſtyczną z kołem (Tangens Cyrculi.)

182. *Zagadn.* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego ſtyczną.

*Rozwiąż.* Punkt dany z środkiem koła złączmy promieniem; i od tegoż punktu wyprowadźmy proſtopadłą do promienia; a ta ſama będzie i ſtyczną z kołem w punkcie danym.

183. *Zagadn.* 3. Od Punktu danego za kołem, poprowadzić do tegoż koła, ſtyczną.

*Rozwiąz.* Złączmy linią, pukt dany z środkiem koła. Na teyże linii, iakó na średnicy, nakreślmy połkole; punktem, gdzie okrąg połkola przecinać będzie koło dane, będzie tym ſamym punktem, do którego poprowadzona linia od punktu danego, będzie ſtyczna z kołem (159.)

To

To zagadnienie dwoiako może być rozwiązane; gdyż połkole z iedney lub z drugiey ſtrony średnicy nakreślić można.

184. *Twierdz.* 3. Od końca promienia poprowadziwſzy ſtyczną z kołem, ieżeli przez punkt, w którym ſię ta ſtyczna koła dotyka, przeciągniemy inną iaką liniią proſtą, ta przecinać będzie okrąg koła.

*Dowodz.* Promień koła ieſt proſtopadły do ſtyczney w końcu tegoż promienia, a zatym pochyły będzie do każdey inney linii; przez ten koniec promienia, to ieſt punkt koła przychodzącey. Poprowadziwſzy więc proſtopadłą od śrzodka koła do tey linii; ta proſtopadła krótſza będzie od promienia; bo promień będzie przeciwproſtkątną tego Tróykąta, którego ta proſtopadła będzie tylko bokiem; aże koniec promienia ieſt na okręgu koła, więc koniec tey proſtopadłey nie doydzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w ſamym okręgu koła, na końcu promienia; a zatym liniia ta przechodząca przez koniec promienia, ponieważ drugi ſwóy punkt ma w kole, przecinać go muſi.

185. *Twierdz.* 4. Jeżeli liniia proſta ieſt ſtyczną z kołem, będzie:

1. Pro-

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie ſię liniia ſtyka z kołem będzie do tey ſtyczney proſtopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do ſtyczney proſtopadłym, tedy liniia inna proſtopadła do tego promienia, i przechodząca przez iego koniec, byłaby ſtyczną z kołem, a ta pierwſza zamiaſt ſtykania ſię z kołem, przecinałaby go, iako ſię w poprzedzaiącym twierdzeniu okazało.

2. Proſtopadła do ſtyezney, od punktu do tknięcia ciągniona, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta proſtopadła nie przechodziła przez środek koła, tedyby iednak promień do tegoż punku do tknięcia ciągniony był proſtopadłym do ſtyczney, a zatym od iednego punktu, to ieſt od punktu do tknięcia, możnaby dwie proſtopadłe prowadzić, co ieſt niepodobna.

186. *Uwaga*. Pokazaliśmy (59) własność kąta, którego wierzchołek ieſt na okrągu koła, a którego dwa ramiona wſpieraią ſię na końcach średnicy tegoż koła; to podanie było tylko przypadkiem ſzczegulnym podania daleko ogulnieyſzego.

go, w którym się dowodzi, że wszystkie te kąty są równe, które wierzchołek maią na okrągu koła, a ramionami wspieraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twierdz.* 5. Kąt maiący swoy wierzchołek na okrągu koła, a którego ramiona są cienciwami tegoż koła, iest połową innego kąta, który ma wierzchołek w samym koła środku, a ramionami swemi obeymuie tenże sam łuk, co i kąt pierwszy.

*Fig.* 3. Niech będą kąty ACB, ADB, z których pierwszy ma wierzchołek w środku C, koła, a drugi na okrągu tegoż koła w punkcie D; i niech obadwa te kąty obeymuią ramionami swemi tenże sam łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

*Przypadek* 1. Gdy iedno ramie AD kąta ADB, iest razem i średnicą koła.

*Dowodz.* Troykąt BCD, iest rownoramiennym, więc kąty B i D będą równe, a summa ich, dwa razy większa od iednego z nich; ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, rowna się tey summie kątów B i D, więc dwa razy iest więszy od iednego z nich, naprzykład od kąta D.

Przy-

Przypadki te, w których żadne ramie kąta ADB nie byłoby razem średnicą koła, można łatwo przywieść do przypadku pierwszego, poprowadziwszy średnicę DE. Fig. 4 i 5

*Przypadek 2.* Gdy środek C, ieſt między ramionami kąta ADB.

*Dowod.* Kąt ADB, ſkłada ſię z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB ſkłada ſię także z dwóch kątów: ACB i BCE; a że podług dowiedzenia w pierwſzym przypadku, każdy z tych dwóch oſtatnich kątów, ieſt dwa razy większy od iednego z pierwſzych, którego ramiona obeymuią tenże ſam łuk; więc obadwa razem pierwſze kąty ſą też dwa razy większe od obydwóch razem kątów drugich; a zatym kąt ACB, dwa razy ieſt większy od kąta ADB. Fig. 4

*Przypadek 3.* Gdy środek C, nie ieſt między ramionami kąta ADB.

*Dowodz.* Kąt ECB, dwa razy ieſt większy od kąta EDB; (1. Przypadek) tenże kąt ECB, ſkłada ſię z dwóch kątów: ECA, ACB; kąt także EDB, ſkłada ſię z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA dwa razy ieſt większy od kąta EDA (1. Przyp:) więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB. Fig. 5.

188. *Uwaga.* Uczniowie poczynaiący, więcey doznawać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciego przypadku, niż drugiego, w którym przez dodawanie to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanie. Można im to w ten sposob obiaśnić, że dwie naprzykład liczby 12, i 8, z których pierwsza dwa razy iest większa od 6, a druga od 4, te mowię dwie pierwsze liczby, gdy dodane będą, summa ich: 20, będzie też większa dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4, to iest od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8; pierwsze większe iest dwa razy od 6. a drugie od 4, różnica między 12, i 8, to iest 4, dwa razy też większa będzie od różnicy między 6, i 4, to iest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby i na liniiach to samo okazać.

Fig. 6. Niech będzie Liniia AB, większa dwa razy od CD, i AE większa tak że dwa razy od CF. Od punktu E, naznaczywszy na linii AB, Liniie EG, EH, równe liniiom FC, FD; Liniie: AG. i BH, będą tak iedna, iako i druga oznaczać różnicę Linii AE, od CF; summa zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całey linii AB, od całey linii CD.

189. *Wniosek.* Katy przy okrągu koła, które ramionami swemi iednakowe łuki obeymuią, są równe; albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w samey rzeczy iest co do kątów przynaymniey ostrych, to iest: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okrągu wynika to z Twierdzenia poprzedzaiącego. Z następuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo ma mieysce i w katach przy okrągu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okrągu.

190. *Twierdz.* 6. Summa kątów w odcinkach na przemian, (174.) równa się dwom kątom prostym; albo co iedno znaczy, ieżeli czworokąt iest kołem obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równa się dwom kątom prostym.

Niech cienciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w iednym odcinku, wraz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrównywa dwom kątom prostym; albo, summa kątów D, i C, czworokąta kołem obwiedzionego, równa się dwom kątom prostym. *Tab. XI Fig. 1*

*Przygotowanie.* Poprowadźmy Przekątną DC.

*Dowod*

*Dowodz.* Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami swemi łuk ieden AC, mnieyszy od pół okrągu; więc są równe. Dla teyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równe. Summa tedy katów ADC, BDC, to iest kąt ADB, równa się summie kątów :ABC,BAC a zatym summa kątów ADB, ACB, równa iest summie trzech kątów Troykąta ABC; a ponieważ ta ostatnia summa wyrównywa dwom kątom prostym, więc i tamta.

*Powtorzenie.* Jeżeli cienciwa iest razem i średnicą, dzieli koło na dwa półkola, a w każdym tym półkole, kąty są proste.

Jeżeli cienciwa nie iest średnicą: dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mnieyszy od pół okrągu; kąt w większym odcinku wspiera się na łuku mnieyszym od pół okrągu, i iest ostry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiera się na łuku większym od pół okrągu, i iest roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów prostych, z kątem ostrym w drugim odcinku.

191. *Twierdz.* 7. Jeżeli od punktu w odcinku koła, lub za odcinkiem będącego, do końców podstawy tego odcinka poprowadziemy dwie linie, kąt między temi dwiema liniiami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D. w odcinku albo za odcinkiem CAB; poprowadźmy od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Liniie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB. Fig, 2.

*Dowodz.* W pierwszym razie, kąt ADB, iest zewnętrzny Troykąta DBC, więc iest większy od iednego z wewnętrznych kątów tegoż Troykąta; to iest od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, iest zewnętrzny Troykąta CDB, a zatym większy od kąta D, albo, co na iedno wychodzi, kąt D, iest mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwaga* 1. W pierwszym razie, gdzie ramie BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty iest między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramie BD przecina okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy iest od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obeymuie swemi ramionami łuk CE, a ten łuk CE, mniey-

 szy

ſzy ieſt od łuku AB, obiętego od tychże ramion AD, BD kąta ADB.

193. *Uwaga* 2. Na okręgu koła znayduią ſię te wſzyſtkie punkta, od których poprowadziwſzy dwie liniie do dwóch punktów danych, kąt między dwiema temi liniiami zawarty, iednakowy zawſze będzie: to ieſt, okrąg kòła ieſt *mieyſcem* (Locus) tych wſzyſtkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między ſtyczną z kołem i między cienciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa ſię *kątem odcinka.*

195. *Twierdz.* 8. *Kąt odcinka*, równa ſię kątowi *w odcinku na przemian.*

Fig. 3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, ſtyczną z kołem, i BA. cienciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięcia. Ten kąt równy ieſt kątowi któremukolwiek w odcinku na przemian, naprzykład kątowi BEA, którego iedno ramie BE ieſt średnicą do punktu dotknięcia B, poprowadzoną.

*Dowod.* Kąt EBD, między średnicą EB, i ſtyczną BD, zawarty, ieſt proſty (185) to ieſt ſumma kątów: ABE, i ABD, czyni kąt proſty.

Kąt

Kąt A w półkole ieſt też proſty (159) więc ſumma kątów ABE, AEB, w tymże ſamym Troykącie równa także będzie kątowi proſtemu. A zatym kąt ABE tak z kątem AEB, iak i z kątem ABD, czyni kąt proſty. Muſzą tedy równe być kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z oſobna do kąta ABE, czyni równą ſummę.

196. *Zagadn.* 4. Na linii daney zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby ſię kąt dany.

Niech będzie liniia AB, na którey zrobićby trzeba ten odcinek. *Fig.* 3.

*Rozwiązanie.* Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z linią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowadzam proſtopadłą do BD, a od punktu A, drugą proſtopadłą do AB. Punkt E, przecięcia tych dwóch proſtopadłych, wyznaczy mi wielkość średnicy BE, należącey do tego koła, w którego odcinku ma ſię mieścić kąt dany.

*Albo też:* Od środka linii daney AB. prowadzę Proſtopadłą, która przetnie liniią BE. w punkcie maiącym ſłużyć za środek koła, w którym będzie odcinek żądany.

Zamiast robienia kąta ABD, równego danemu, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniaiący kąt dany do 90. stopniów, to iest czyniący z nim razem kąt prosty.

197. *Zagadn.* 5. Maiąc dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

*Rozwiąz.* Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cienciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta cienciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagadn.* 6. W koło dane wpisać (inscribere) Troykąt, któryby miał kąty wszystkie równe kątom Troykąta danego.

*Rozwiąz.* 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cienciwy po prawey i po lewey ręce, czyniące dwa kąty równe kątom Troykąta danego. Liniia trzecia łącząca końce tych dwóch cienciw, będzie trzecim bokiem Troykąta, którego kąty wszystkie równe będą kątom Troykąta danego.

*Rozwiąz.* 2. Troykąt dany opisuię (circumscribo) kołem, i do trzech wierz-

choł-

chołków kątów, prowadzę od środka trzy promienie. Od tegoż samego środka, kreślę koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła, przecinać będzie promienie trzy pierwszego, będą wierzchołkami kątów Troykąta, którego szukam.

199. *Zagadn.* 7. Maiąc dany Troykąt, wpisać weń koło; to iest nakreślić takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Troykąta.

*Rozwiąz.* Srodek tego koła, ponieważ iednakowo ma być odległy, od wszystkich trzech boków Troykąta danego, musi się gdzieś znaydować na linii dzielącey kąt którykolwiek Troykąta na dwie równe części, gdyż tey linii odległość punktów wszędzie będzie równa od dwóch boków Troykąta iey przyległych; podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Troykąta drugą linią; tam gdzie ta druga liniia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy, bo ten punkt przecięcia będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Troykąta danego.

200. *Zagadn.* 8. Maiąc dane koło, opisać na nim (circumscribere) Troykąt, któryby

ryby miał kąty wſzyſtkie równe kątom Troykątá danego.

*Rozwiąz.* 1. W Troykąt dany wpiſuię koło; i do Punktów trzech dotknięcia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż ſamego środká kreślę drugie koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy pierwſzego, albo ich przedłużenia oznaczą trzy punkta dotknięcia trzech boków Troykąta, którego ſzukam.

*Rozwiąz.* 2. W czworokącie, który ſię zrobi z dwóch promieni koła danego, i z dwóch ſtycznych z kołem w końcach tychże promieni, kąty dwa między temi promieniami i ſtycznemi będą proſte, a zatym kąt ieden między dwiema ſtycznemi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razem wzięte, równe dwom kątom proſtym. (85) Ztąd wypada wykreślenie naſtępuiące.

Prowadzę promień ieden w kole danym; po obydwóch ſtronach tego promienia, prowadzę dwa inne czyniące z pierwſzym dwa kąty, równe kątom dwom dopełniaiącym dwa ktorekolwiek kąty Troykąta, do 180 ſtopniów, to ieſt równe

dwom

dwom kątom przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promieni przeciągam trzy ſtyczne, te zrobią Troykąt żądany.

## ROZDZIAŁ VIII.

### *Wſtęp do Proporcyi przez przykłady Geometryczne, z przyſtoſowaniem w ſzczegulności do Troykątów podobnych, a w ogulności do innych Figur proſtokreślnych także podobnych.*

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przyſtawania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też ſame ilości porównywać z ſobą będziemy w ſpoſob ogulnieyſzy.

201. *Uwagi.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podſtawę i wyſokość, były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wyſokością, ale z nie iednakową podſtawą; i obaczmy co za różnica wypadnie między temi dwoma równoległobokami, z przyczyny nierówności ich Podſtaw.

Jeżeli

Jeżeli podſtawa iednego z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większa będzie od podſtawy drugiego; da ſię podzielić ten pierwſzy równoległobok, na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między ſobą, i z drugim rownoległobokiem; ponieważ wſzyſtkie iednakowe mieć będą wyſokości, i podſtawy; a zatym ten pierwſzy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy więkſzy od drugiego.

Gdyby podſtawa pierwſzego równoległoboku nie zamykała w ſobie kilka zupełnie razy podſtawy drugiego równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwſza podſtawa, miała w ſobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podſtawa druga ma 3; możnaby tę pierwſzą podſtawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między ſobą, i równych także każdey z 3. części drugiey podſtawy; a zatym, iako liczby ukazuiące wielkość podſtawy pierwſzego równoległoboku względem podſtawy drugiego, ſą 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazuiące wielkość pierwſzego równoległoboku względem drugiego, ſą: 4, 5, 7, i t. d, i 3. Albo; iako podſtawa pierwſzego równoległoboku zamyka w ſobie podſtawę drugiego tyle razy, ile oznaczaią liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d; tak

też

też pierwſzy równoległobok zamyka w ſobie drugi, tyle razy, ile oznaczaią te ſame liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$, $\frac{\ }{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Troykąty maią równe wyſokości, a nierówne podſtawy; ieżeli podſtawa pierwſzego Troykąta zawierać w ſobie będzie podſtawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też powierzchnia tego pierwſzego Troykąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy więkſza od powierzchni drugiego. Toż mowić, gdy podſtawa iednego Troykąta, zamiałt zawierać w ſobie kilka zupełnie razy podſtawę drugiego, będzie ſię tylko ſkładała z kilku takich części równych, z iakich ſię ſkłada i podſtawa Troykąta drugiego. Y tak ieżeli podſtawy obydwóch Troykątów zamykaią w ſobie, iedna 4, a druga 5, takichże równych części; te też dwa Tróykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5. równych między ſobą Troykątów, maiących wyſokość iednakową z wyſokością nie podzielonych Troykątów, a za podſtawę, część iednę tylko podſtawy tamtych Troykątów. A zatym, iako podſtawa pierwſzego Troykąta ieſt $\frac{4}{5}$ podſtawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwſzego Troykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa

Dwa kąty maiące swoie wierzchołki w środku tego samego koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów w środku kół równych, ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d. większym, niżeli iest ten, na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można, gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. Y tak ieżeli ieden z tych łukow może być podzielony na 4. równe części, a drugi na 3, takież części; dwa kąty, które się wspieraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, a drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przystosować można i wycinkom w kołach równych, względem łukow, które ramionami swemi też wycinki obeymuią.

W takich szczegulnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości iednakowego gatunku, naprzykład dwie linie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiey, i znaydowano, że tylekroć i inne dwie ilości iednakowego także gatunku zamykały

kały się iedna w drugiey, naprzykład: dwa Rownoległoboki, dwa Troykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do siebie przyrównywamy, abyśmy wiedzieli, ile razy iedna zamyka w sobie drugą, takie przyrównywanie nazwać można stosunkiem Geometrycznym (Ratio Geometrica) albo bez przydatku stosunkiem tych dwoch ilości. Pierwszy wyraz ilości, którą do drugiey stosuiemy, zwać będziemy *Poprzednikiem* stosunku (antecedens rationis.) Drugi zaś wyraz ilości tey, do ktorey przyrównywamy ilość pierwszą, nazwiemy *Następnikiem* (consequens) stosunku. To co z tego przyrownania wynika, nazwać można *Wykładnikiem* stosunku (exponens rationis.) Dwa stosunki nazywaią się równemi, gdy równemi są ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych samych Definicyi widziemy, że wyrazy stosunku Geometrycznego, nie mogą być tylko iednakowego gatunku, gdyż niemożna do siebie przyrownywać, tylko ilości iednakowego gatunku; a ztąd dwa wyrazy stosunku tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których iedna tyle razy zamykać w sobie drugą będzie, ile razy ilość przyrowny-

wać

wać ſię maiąca, zamyka w ſobie drugą ilość tegoż gatunku, do którey ią przyrównywamy. Przeto ſtoſowanie takie uważać można iak dzielenie, liczebne biorąc za liczbę podzielną poprzednika ſtoſunku, za liczbę dzielącą naſtępnika ſtuſunku, a za wielołaz wykładnika tegoż ſtoſunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którego Licznikiem Poprzednik, a mianownikiem naſtępnik ſtoſunku.

204. Gdy ſię cztery ilości takie znayduią, że ſtoſunek dwóch pierwſzych, równy ieſt ſtoſunkowi dwoch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcyą Geometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mowiemy, że tak ſię ma Poprzednik pierwſzego ſtoſunku, do ſwego naſtępnika, iak ſię ma Poprzednik drugiego ſtoſunku do ſwego także Naſtępnika. I tak, przypadki ſzczegulne, któreśmy za przykład wyżey przytoczyli, takby mogły być wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wyſokość, powierzchnia iednego z nich, tak ſię będzie miała do powierzchni drugiego, iak ſię ma podſtawa pierwſzego, do podſtawy drugiego. Jeżeli dwa Troykąty iednakową maią wyſokość, powierzchnia iednego Troykąta, tak ſię ma do powierzchni drugiego Troykąta, iak ſię

ſię ma podſtawa pierwſzego do podſtawy drugiego.

Jeżeli dwa kąty w środku dwóch równych kół znayduią ſię; ieden z tych kątów, tak ſię mieć będzie do kąta drugiego, iak ſię ma łuk obięty od ramion pierwſzego kąta, do łuku obiętego od ramion drugiego kąta.

Jeſzcze i tak możnaby te ſame podania wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowey wyſokości tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa Troykąty iednakowey wyſokości, tak ſię maią do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dwa kąty w środku koł równych tak ſię maią do ſiebie, iak dwa łuki, na których ſię wſpieraią. Toż mówić i o wycinkach koł równych.

Na koniec ieſzcze krócey zwykły ſię czaſem wyrażać podobne podania, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieſzcze znaczących ilości odmiennego gatunku. *Wiele na tym zawiſło, aby Uczniowie znali ſię dobrze na takowych wyrazach częſto używanych.*

Mowi

Mówi się na przykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość iest *iednostayna* (constans) proporcyonalną iest do swoiey podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w porównanie, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dla tego się zaś opuszczaią, że ten drugi równoległobok równey z pierwszym wysokości być mniemamy, i iednostayney, to iest nieodmienney podstawy, a zatym i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względem drugiego równoległoboku opuszczonego, im podstawa pierwszego większa lub mnieysza iest od podstawy drugiego. Tak, niech pierwszy równoległobok ma wysokości 3. łokcie, równie iak i drugi; ieżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatym i iednostayną powierzchnią 12, łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiego to iest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie, powierzchnią od drugiego, im większą lub mnieyszą damy mu podstawę od drugiego. Dawszy mu naprzykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchnia iego 24 łokci

kci kwadratowych, dwa razy większa od powierzchni drugiego równoległoboku; dawszy mu podstawy 2. łokci, będzie powierzchnia iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mnieysza od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwszy równoległobok, albo powierzchnia iego, tyle się tylko powiększa lub pomnieysza względem powierzchni drugiego równoległoboku, ile się powiększy lub pomnieyszy podstawa iego względem podstawy drugiey iednostayney, dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powierzchnia tego rownoległoboku, którego wysokość iednostayna, proporcyonalną iest do swoiey podstawy; to iest gdy podstawa dwa razy naprzykład większa będzie, powierzchnia też większa będzie dwa razy; gdy tamta dwa razy mnieysza, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości oznaczone przez A,B,C,D, które do siebie stosować można; zgodzono się, aby stosunek ten wyrazić kształtem nastęPuiącym $A:B = C:D$; co tak się wymawia: A. tak się ma do B, iak się ma C. do D. Dwa punkta umieszczone między dwoma wyrazami każdego w szczególności stosunku, znakiem są dzielenia iednego wyrazu przez drugi; dwie zaś linie w pośrodku znaczą równości dwóch stosunków,

206. *Wnioſki.* Z tych *zaſad* (principium) któreśmy o proporcyach założyli, wynikaią naſtępuiące podania.

1. Jeżeli dwa ſtoſunki ſą równe trzeciemu; równe też i ſobie będą.

2. Jeżeli w dwoch Proporcyach trzy pierwſze wyrazy w iedney, równe ſą trzem pierwſzym wyrazom w drugiey; to i czwarte wyrazy równe też będą.

3. Stoſunek między dwiema ilościami tenże ſam ieſt, co i między temiż ilościami podwoionemi, potróionemi i t. d. Tak naprzykład 4. ma ſię do 2, iak 8. do 4, albo iak 12 do 6. i t. d. Ztąd wynika, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwſze lub dwa oſtatnie wyrazy Proporcyi, nie naruſzaiąc przeto proporcyi między temiż czterema wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Naſtępniki; a proporcya wſzelako będzie zachowana. W pierwſzym razie wykładnik ſtoſunków, ſtanie ſię dwa, trzy i t. d. razy więſzym niż był z początku; w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t. d. Wykładnika pierwſzego.

5 W tey-

5. W teyże samey proporcyi, można odmienić mieysce obydwom Poprzednikom; to iest: położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po tey odmianie zachowana będzie między dwoma stosunkami teyże proporcyi. Y tak naprzykład w tey Proporcyi: 4: 2 = 12: 6, można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12 i napisać: 2: 4 = 6: 12, wszelako iednak zachowa się Proporcya; bo iako w pierwszey proporcyi wykładniki stosunków obydwóch: 4: 2, i 12: 6, były równe; to iest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2; tak i w drugiey proporcyi, wykładniki stosunków 2: 4, i 6: 12 są równe; to iest tak 2, przez 4, iak i 6 przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloraz iednakowy ułomek: $\frac{1}{2}$. Toż mowić i o podobney odmianie w iakieykolwiek inney Proporcyi; co tak można ogolnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B = C: D.
to też i B: A = D: C

6. W proporcyi każdey można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch pierwszych wyrazów, tak się ma do iedne-

go z tych dwóch wyrazów, iak ſię ma ſumma albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4: 2 = 12: 6, to też będzie 6: 2 = 18: 6, albo 6: 4 = 18: 12, albo 2: 4 = 6: 12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Naſtępnika ſummę lub różnicę ſtoſuiemy do naſtępnika iey własnego; Wykładnik każdego w ſzczególności ſtoſowania powiększy ſię lub pomnieyſzy iednością, a zatym równy będzie w obydwóch ſtoſunkach i po takiey odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Naſtępnika ſummę lub różnicę ſtoſuiemy do Poprzednika ſey własnego, iedno czyniemy, iak gdybyśmy pierwey poprzednika każdego za Naſtępnika położyli, a potym dopiero, ſummę lub różnicę ich ſtoſowali do naſtępników, tak iak wyżey; a zatym tąż częścią pomnoży ſię lub zmnieyſzy wykładnik pierwſzego ſtoſunku, iak i drugiego.

*Wyrażenia literalne tegoż ſamego.*

Jeżeli $A : B = C : D.$

to też $A + B : B = C + D : D$

$A - B : B = C - D : D$

$A + B : A = C + D : C$

$A - B : A = C - D : C.$

Gdyby Naſtępniki większe były od ſwoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A: B = C: D możnaby w tę zamienić B : A = D: C. a zatym.

B — A: A = D — C: C

B — A: B = D — C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztery wyrazy iednego ſą gatunku; to ieſt, gdy wſzyſtkie znaczą *n. p.* linije, lub powierzchnie i t. d. można powiedzieć że ſumma dwóch Poprzedników, tak ſię ma do ſummy dwóch Naſtępników, iak ſię ma którykolwiek poprzednik do ſwego naſtępnika.

Jakoż, ieżeli ieden Poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t. d. razy ſwego Naſtępnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy naſtępnika ſwego zamykać w ſobie będzie; a zatym i ſumma Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie ſummę naſtępników. Przeto ſumma Poprzedników tak ſię mieć będzie do ſummy naſtępników, iak każdy w ſzczegulności Poprzednik do ſwego Naſtępnika. To ſamo rozumowanie przyſtoſować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch naſtępników; i do więcey iak dwóch równych ſtoſunków.

Wſzyſtkie te odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnić należy.

207. *Uwaga.* Dadzą poznać Nauczyciele Uczniom ſwoim, że *Reguła trzech*, ieſt pewnym gatunkiem proporcyi, w którey z trzech wyrazow znaiomych, ſzukamy czwartego nieznaiomego, co ſamo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożenie nawet i dzielenie, do proporcyi przyrównać można; bo w mnożeniu, liczby, mnożna, i mnożąca ſię średniemi wyrazami proporcyi, iedność, ieſt pierwſzym wyrazem proporcyi, a liczba rozmnożona ieſt oſtatnim wyrazem. Y tak naprzykład: $4 \times 3 = 12$. rozłożyć można na proporcyą naſtępuiącą $1 : 4 = 3 : 12$. W dzieleniu zaś, liczba dzieląca i wieloraz ſą średniemi wyrazami proporcyi; iedność ieſt wyrazem pierwſzym, a liczba podzielna ieſt oſtatnim wyrazem. Y tak naprzykład $\frac{8}{4} = 2$ albo $8 : 4 = 2$, rozłożyć można na proporcyą naſtępuiącą $1 : 4 = 2 : 8$. Więcey ieſzcze takowych przykładów podać nie zawadzi.

208. *Twierdzenie* I. *fundamentalne.* Gdy w Troykącie iakimkolwiek bok ieden przedłużaiąc go powiękſzemy, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy, i przez końce

takiego przedłużenia poprowadziemy równolegle od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobiąsię tym sposobem Troykąty, których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Troykąta, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy.

Niech naprzykład będzie Troykąt ABC, którego bok AB, tak przedłużyliśmy, aby linija AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległą od BC; Liniia DH, dwa razy też większa będzie od linii BC, a liniia AH dwa razy większa od linii AC. *Fig.* 4

*Wykreślenie.* Przez punkt C. popowadźmy CN równoległą od AB, któraby spotkoła w punkcie N, linią DH.

*Dowodz.* Czworokąt BDNC, iest równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne są równe; to iest BC $=$ DN a BD $=$ CN: a że BD $=$ AB, więc i CN $=$ AB. Kąty iednostronne A, i NCH są równe iako też i kąty iednostronne ACB. AHD; a zatym Troykąty ACB. CHN dla równości kątów wszystkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC $=$ CH, a tym samym AH $=$ 2 AC, to iest liniia AH dwa razy większa od AC. Jest też i BC $=$ NH, a tym samym DH $=$

2 BC,

2 BC, to ieſt liniia DH dwa razy większa od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie iak wyżey dowieść będzie można, że też liniia EI trzy razy ieſt większa od BC, a AI trzy razy większa od AC, co ſię łatwo okaże pociągnąwszy liniią HO równoległą od AE; bo dla równości kątów wſzyſtkich, i boków AB, HO, Troykąty ABC, HOI przyſtaną do ſiebie, a zatym AC = HI, i BC = OI. Aże EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatym EI = 3 BC. Tak też i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże ſpoſobem dowodzi ſię, że ieżeli liniia AF, cztery razy będzie większa od linii AB; Liniia też FL równo odległa od BC, cztery razy od niey większa będzie, i liniia AL, cztery także razy większa od AC. i t. d.

209. *Zagadn.* 1. Podzielić daną linią na ilekolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniia dana AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

*Rozwiązanie.* Od końca iednego naprzykład A, linii daney AG, prowadzę drugą

drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z linią daną, kąt iaki mi się podoba. Od A ku M, biorę tyle części równych na linii AM, na ile ich ma być podzielona liniia AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatnia część podziału kończy, łączę liniią MG z punktem G Linii daney AG. Przez inne podzielone punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległe od linii M G, do linii AG. Te równoodległe: LF, IE, HD, CB, wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziału żądanego.

Podobnym sposobem postąpić sobie trzeba, gdy na więcey lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dla większey łatwości, w prowadzeniu równoodległych, można użyć następuiącego sposobu, zwłaszcza gdy na wiele równych części przypada dzielić liniią daną.

Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iey iednego A linną AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę liniią BD, od pierwszey równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i *Fig.* 5.

na

na takież pięć równych części od punktu B, dzielę. liniią BD. Punkta podziałów równych w obydwóch liniiach, łączę tyląż równoodległemi; te przetną liniią daną AB w punktach podziału żądanego.

Dowodzenie tego nie różni się od poprzedzaiącego, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można ieden tylko Troykąt. BAC, lub ABD; a zatym równość części. Linii AB, podobnie się, iak w pierwszym Twierdzeniu, dowiedzie. (p)

210. *Twierdz.* 2. Dwa Troykąty rownokątne, maią proporcyonalne boki przeciwne kątom równym.

Niech

(p) *Rozwiązuiąc tymże podobne Zagadnienia, niechay nie przestaią Uczniowie na Figurze podaney, ale niech sami kreślą sobie podobną Figurę, i na niey rozwięzuią Zagadnienie. Figura podana niech im tylko służy do łatwieyszego w czytaniu zrozumienia Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią, niechay zamknąwszy nawet xiążkę, na Figurze osobney od nich nakreśloney pokażą Nauczycielom, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.*

Niech będą dwa Troykąty AGM, i abc, *Fig. 4 i 6.* w których kąty A i a, G i b, M i c są równe. Niech naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc.

Jakoż odciąwszy Liniią AB, równą linii ab, i AC rowną ac, i pociągnąwszy liniią BC, Troykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a wszczególności kąty B i b, C i c będą równe. A że też kąty G i b, M i c, są równe, więc równe także są i kąty G i B, M i C; azatym linii e BC, GM będą równoodległe. Przeto według pierwszego Twierdzenia, ieżeli AG iest pięć razy większa od AB, czyli od ab, będzie też i AM pięć razy większa od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większa od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Troykątów, przeciwne równym kątom nie pięć, ale mniey lub więcey zupełnych razy, w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Troykątach, przeciwne kątom rownym, nie zamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w sobie 7. takich równych części, iakich

dru-

drugi ma tylko 3; w takim razie inne też boki równym kątom przeciwne, w tychże Troykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, aleieden składałby się z 7, takich części, z iakich 3, składa się drugi. Tak na Figurze 7, gdzie Troykąty ABC, abc są równokątne, i bokom AB, ab, taka długość dana, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ad, takież miał 3 tylko częci równe linii AD, albo ad; w tych Troykątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległe od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7, drugi 3, części równe linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Troykątów, przeciwne kątom równym, więcey lub mniey części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Troykątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy, dobrze iest wierzchołki kątow równych, naznaczać podobnemi literami, naprzykład, gdy nad wierzchołkiem kąta w iednym Troykącie napiszemy litere A, napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Troykącie, literę a; gdy nad drugim kątem, w pierwszym Troykącie będzie

dzie B, niech i nad drugim kątem równym tamtemu w drugim Troykącie będzie b, i t. d. Tym ſpoſobem i boki przeciwne równym kątom w obydwóch Troykątach, będą podobnemi też literami naznaczone; a zatym gdy w Proporcyi weźmiemy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki ſtoſunku, za Naſtępniki wziąść będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc; i dla tego wſzyſtkie te proporcye będą dobre; AB : ab = AC : ac. AB : ab = BC : bc, albo AC : ac = AB : ab. BC : bc = AB : ab; albo, AC : ac = BC : bc, albo BC : bc = AC : ac.

212. *Twierdz*: 3. Jeżeli we dwóch Troykątach, kąty dwa którekolwiek ſą równe, i boki dwa około każdego z tych kątów proporcyonalne; takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równe, boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalne; to ieſt niech ſię ma tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB : ab = AC : ac. W takim razie będą też równe kąty B, b, i kąty C, c, a zatym i ſtoſunek boków BC, bc, będzie ten ſam co i boków AB, ab, albo AC, ac,

*Wy-*

Tab. XII Fig. 1 *Wykreślenie.* Na boku AB, weźmy liniią AD. równą ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E

*Dowodz.* Troykąty ABC, ADE, są równokątne; więc (iako się w drugim Twierdzeniu dowiodło) AB: AD (albo ab) = AC: AE. Aże AB: ab = AC: ac. więc AE = ac; a zatym Troykąty ADE, abc mogą przystać do siebie; że zaś Troykąty ABC, ADE, są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ABC, abc, a zatym, AB: ab = BC: bc.

213. *Twierdz.* 4. Jeżeli w dwóch Troykątach, trzy boki w iednym są proporcyonalne względem trzech boków w drugim, takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty, ABC, abc, i boki w nich proporcyonalne, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, te dwa Troykąty są równokątne.

*Wykreślenie.* Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

*Dowodz.* Troykąty ABC, ADE są równokątne, więc AB: AD (albo ab) = AC: AE.

[Aże

Aże też ieſt AB : ab. = AC: ac

więc - - - AE = ac

Podobnie AB:AD (albo ab) = BC: DE

Aże też ieſt, AB: - - ab = BC: bc

Więc - - - DE = bc

A zatym dwa Troykąty ADE, abc wſzyſtkie trzy boki maią ſobie równe, i dlatego mogą przyſtać do ſiebie, i ſą równokątne. Aże też ſą równokątne i Troykąty ABC, ADE, więc równokątne także będą Troykąty ABC, abc.

214. *Twierdz.* 5. Niech będą dwa Troykąty maiące kąt ieden proſty, roſtwarty, lub oſtry równy w obydwóch Tróykątach, i niech ſtoſunek ramion przy tych kątach będzie równy ſtoſunkowi boków przeciwnych tymże kątom. Te dwa Troykąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku, boki przeciwne kątowi oſtremu większe były w obydwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iedney lub po drugiey ſtronie przyległe temuż kątowi; albo chociaż te boki przeciwne mnieyſze będą od ramion, byleby inny kąt w obydwóch Troykątach był roſtwarty

ſtwarty, lub oſtry, który iedno ramie, ma ſpolne z katem pierwſzym, równym w obydwóch Troykątach. Niechby naprzykład były dwa Troykąty ABC, abc, w których kąty A i a, równe, i ſtoſunek ramienia AC do ac, taki iaki, boku BC, do bc. Te dwa Troykąty będą równokątne.

Fig. 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa ſą proſte.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a obadwa ſą roſtwarte.

Fig. 4. y 5. 3. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre, ale boki BC, bc. większe od ramion AC, ac.

4. Gdy kąty A i a obadwa ſą oſtre ale boki BC, bc, mnieyſze od ramion AC, ac; i kąty B i b, obadwa oſtre, Fig. 4. albo obadwa roztwarte Fig. 5.

*Wykreślenie powſzechne.* Weźmy Liniią AD, równą ac, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

*Dowodz.* Troykąty ACB, ADE ſą równokątne;

Więc AC:AD (albo ac) = BC: DE

Ale też ieſt AC : ac = BC : bc

więc DE = bc

A za-

A zatym dwa Troykąty ADE, acb mogą przyſtać do ſiebie, i ſą równokątne; że też i Troykąty ACB, ADE ſą równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ACB, acb. (q)

215 *Def.* Gdy w dwóch Figurach proſtokreślnych równe ſię kąty wſzyſtkie znayduią iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcyonalne, takie Figury nazywaią ſię *podobnemi* (Figuræ ſimiles.)

216. *Uwaga.* Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzaiących iasnie ſię pokazuie, że równość kątów w dwóch Troykątach, pociąga za ſobą proporcyonalność ich boków, i wzaiemnie proporcyonalność boków w dwóch Troykątach wywodzi równość kątów w tychże Troykątach. W innych zaś Figurach proſtokreślnych, które z więcey niż trzech boków ſą złożone, nie można z rów-

(q) *Dla ſkrócenia, różne te przypadki w iednym powſzechnym zamknęło ſię dowodzeniu; lepiey iednak będzie każdego z oſobna przypadku oſobno uczniom dowodzić, aby wielu razem okoliczności wyſtawieniem, baczność ich nie była roſtargniona.*

równości kątów we dwóch takich wielo-
kątach, wnoſić proporcyonalność ich bo-
ków, ani wzaiemnie z proporcyonalno-
ści boków, wnoſić równość kątów. Y
tak kwadrat proſtokątny, z kwadratem u
kośnym, lubo maią boki proporcyonalne,
nie maią iednak kątów równych. Dwa
znowu proſtokąty nie różnią ſię między
ſobą, co do kątów, a iednak boki ich mo-
gą być nierówne i cale nieproporcyo-
nalne.

Trzeba iak nayiaśniey i naydokładniey wyłożyć Uczniom te trzy rzeczy, to ieſt: *Przyſtawanie*, *Równość* i *Podobieńſtwo* Figur.

*Równość* dwòch naprzykład Figur, ściąga ſię tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożenia ich bokòw, albo granic w ktòrych ſię zamykaią. I tak dwa Troykąty, ktòre, ròwne podſtawy maią, i wyſokości ſą ſobie ròwne lubo ich boki, nie iednakowo mogą być ułożone, i więkſze iedne lub mnieyſze od drugich. Dla tego też można znaleść Troykąt, lub Kwadrat, ròwny Figurze proſtokreślney daney, iakażkolwiek liczba iey bokòw będzie, i tychże bokòw ułożenie.

*Podobieńſtwo* ściąga ſię tylko do ſamey Figury czyli ułożenia bokòw, nie zaś do wiel-

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Troykąty mogą być do siebie podobne, lubo ieden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba 1mo. Aby miały iednakową liczbę boków. 2do. Aby kąty w iedney Figurze były równe kątom w drugiey. 3tio. Aby *boki odpowiadaiące* (latera correspondentia:) to iest te, które zamykaią w sobie kąty równe, były proporcyonalne. I tak dwa kwadraty zawsze są podobne ieden do drugiego, chociażby naprzykład bok iednego był na mile długi, a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

*Przystawanie* zamyka w sobie razem równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły, trzeba, aby się w niczym nie rożniły, tylko w tym, że na odmiennych mieyscach są nakreślone. (r)



---

(r) *Przetrząsnowszy Twierdzenia ściągaiące się do równości, i do podobieństwa Troykątów, łatwo postrzeżemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zasadzaią na tych, któreśmy dawali mówiąc o przystawaniu Troykątów. Wiele na tym zawisło, aby często przypominać Uczniom sposób postępowania,*

Tab. XIII. Fig. 1

217. *Twierdz.* 6. Jeżeli dwie iakiekolwiek Figury proſtokreślne ſą podobne, i w każdey z nich przez wierzchołki kątów równych, poprowadziemy do drugich kątów, tyle przekątnych, ile ich poprowadzić można; wſzyſtkie te Troykąty, na które iednę Figurę podzielemy, będą podobne Troykątom w drugiey Figurze.

*Przykład.* Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobne do ſiebie; od wierzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwſzy przekątne, AC, AD, ac, ad; Troykąty, ABC, ACD ADE, będą podobne Troykątom, abc, acd, ade.

*Dowodz.* Ponieważ te Pięciokąty ſą do ſiebie podobne, kąty w nich B i b, będą równe, i boki około tych kątów proporcyonalne; dwa więc Troykąty ABC, abc, ſą do ſiebie podobne, iako maiące kąty B i b, równe, i boki około nich proporcyonalne, a wſzczegulności kąt ACB, równy ieſt kątowi acb; a że też równe ſą dane kąty, BCD, bcd, więc i kąty ACD, acd, równe będą. Boki także AC, ac, ſą między ſobą iak boki AB, ab, albo BC,

---

*który prowadzi od wyobrażeń prościeyſzych, do tych, które bardziey ſą zawikłane.*

BC, bc. *Aże* tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, ſą w proporcyi z bokami DC, dc, więc i boki AC, ac. ſą proporcyonalne bokom DC, dc; a zatym i Troykąty ACD, acd, będą podobne maiąc, kąty C i c równe, i boki około nich AC, DC; ac, dc. proporcyonalne; a wſzczegulności kąty, ADC, adc, będą równe. *Aże* znowu i kąty E, e, ſą równe, więc i Troykąty ADE, ade, będą względem ſiebie równokątne; a zatym podobne.

218. *Uwaga* 1. Dla dowiedzenia, że Troykąty ADE, ade. ſą podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de. można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z ſamego wykreślenia; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła być równość okazana, z równości iuż dowiedzioney kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w innych Troykątach; a tym ſamym równość kątów E, e wydałaby ſię, a zatym i podobieńſtwo Troykątów ADE, ade, byłoby dowiedzione.

219. *Uwaga*. 2. Wiele na tym zawiſło, aby to dać poſtrzedz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączone będą przekątnemi wierzchołki dwóch ką-

tów odpowiadaiących sobie, te przekątne mieć będą iednostayne stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tym gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączemy przez przekątne; Troykąty złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobne.

220. *Zagadn.* 1. Maiąc dane trzy liniie proste, na trzy pierwsze wyrazy proporcyi, znaleść liniią czwartą proporcyonalną.

*Wykreślenie.* Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wierzchołka iego dwie dane liniie, maiące służyć za dwa pierwsze wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym sposobem i trzecią daną liniią, na to ramie, na które iuż iest przeniesiona pierwsza liniia proporcyi. Od końca tey trzeciey linii, poprowadźmy aż do drugiego ramienia liniią równoodległą, od tey, która złączyła końce dwóch pierwszych linii. Liniia zawarta między wierzchołkiem kąta i punktem, w którym ostatnia równoodległa przecina ramie

mie

mie drugie, będzie czwartą liniią proporcyonalną, którey ſzukaliśmy. (s)

221. *Zagadn.* 2. Maiąc daną linią proſtą, tak ią przeciąć, aby dwa iey odcinki tak ſię do ſiebie ſtoſowały, iak ſię ſtoſuią dwie inne dane liniie.

*Wykreślenie.* Od końca iednego linii daney do przecięcia, poprowadźmy pod iakimkolwiek kątem liniią równą iedney z tych dwóch, których dany ieſt ſtoſunek, a od drugiego końca, w ſtronę przeciwną, poprowadźmy równoodległą od pierwſzey, równą drugiey linii, którey także dany ieſt ſtoſunek.

Złączmy końce tych dwóch linii w przeciwne ſtrony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, którego ſzukaliśmy.

Albo

(s) *Co w Arytmetyce znaczy* Reguła trzech, *to znaczy w Geometryi Zagadnienie, aby trzy maiąc dane Liniie proſte, znaleść czwartą proporcyonalną. Jeſt to w ſamey rzeczy Reguła trzech wykonana na liniach.*

*Albo tak.* Od końca linii daney do przecięcia, poprowadźmy linią, któraba z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą linią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych linii, których dany iest stosunek; i od końca znowu tey ostatniey linii pociągniymy drugą liniią, równą drugiey, którey także dany iest stosunek. Koniec iey złączmy z końcem linii daney do przecięcia; a od tego punktu, gdzie się pierwsza kończyła, a ta druga zaczynała, poprowadźmy równoodległą, która przetnie liniią daną do przecięcia, w punkcie żądanym.

Ten ostatni sposob postępowania, może być przystosowanym i w innych razach, gdzieby liniią daną na więcey części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3, 4. 5. i t. d które takby się miały do siebie, iak się maią 3, 4, 5, it. d. linii danych. (t)

222. *Zagadn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby summa z tey linii i z iey przedłużenia tak się miała do samego przedłużenia, iak się maią do siebie dwie inne

(t) *Takie zagadnienie iest tym samym w Geometryi, czym iest w Arytmetyce* Reguła społki.

inne liniie dane; czyli, znaleść dwie liniie, których dana ieſt różnica i ſtoſunek.

*Wykreślenie.* Od obydwóch końców linii daney, poprowadźmy w iednę ſtronę dwie liniie równoodległe, i równe dwom liniiom, których dany ieſt ſtoſunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż ſię ſpotka z przedłużeniem linii daney. Punkt ten ſpotkania, wyznaczy długość przedłużenia linii daney; i odległość iego od dwóch końców teyże linii, będzie wymiarem długości dwoch linii, których ſzukaliśmy.

223. *Zagadn.* 4. Maiąc dany Troykąt, i liniią oſobną, wyſtawić na tey linii Troykąt podobny danemu.

*Spoſob* 1. Dwom bokom Troykąta danego, i trzeciey Linii daney, ſzukam czwartey proporcyonalney, i mieć będę dwa boki Troykąta, ktòrego ſzukam, w proporcyi z dwoma bokami Troykąta danego. Tymże ſpoſobem znaydę i trzeci bok Troykąta, który ma być podobny Troykątowi danemu.

*Spoſob* 2. Od dwóch końców linii daney, prowadzę po iedney ſtronie dwie

liniie,

liniie, czyniące z nią dwa kąty równe dwom kątom Troykąta danego; te dwie liniie zeyściem się z sobą, zrobią z daną liniią Troykąt podobny danemu.

*Sposob* 3. Liniią daną przenoszę na bok ktorykolwiek Troykąta danego, tak, aby koniec ieden tey linii był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Troykąta, lub za nim, gdy liniia dana dłuższa będzie od boku Troykąta. Z końca tego drugiego, Linii daney prowadzę rownoodległą od boku Troykąta przeciwnego kątowi, od ktorego pierwszą liniią ciągnąłem, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiem troykąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobem Troykąt podobny danemu, i maiący za podstawę, liniią rowną daney, ktory to Troykąt przerysować potym mogę na symey linii daney. (u)

224. *Zagadn.* 5. Na daney linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze daney.

*Roz-*

---

[u] *Częste tego zagadnienia używanie, było pobudką do podanie kilku sposobów, ktoremi być może rozwiązane.*

*Rozwiąz.* Na daney Figurze od końca boku którego kolwiek. prowadzę tyle przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Troykąty. Potym na linii daney wykreślam po iedney ſtronie ſpoſobem wyżey opiſanym, tyle Troykątów podobnych, ile ich ieſt w Figurze daney. Wierzchołki tych Troykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, którey ſzukałem.

225. *Uwaga.* Między innemi ſpoſobami rozwiązania tego Zagadnienia, ſpoſob podany zdaie ſię naylepſzym; a to dla tego, że używaiąc go, uchybienia, które popełnić można w położeniu linii, czyli boków Figury, nie zawiſły iedne od drugich; i można uchybić w położeniu iedney linii, a nie uchybić tym ſamym, w położeniu drugiey; na co oſobliwſzą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie przybrane.* (Lemma). W Troykącie proſtokątnym, gdy ſpuściemy proſtopadłą, od wierzchołka kąta proſtego; ta proſtopadła podzieli Troykąt na dwa inne z pierwſzym równokątne, a zatym i równokątne między ſobą.

Niech będzie Troykąt ABC proſtokątny w C zkąd ſpuſzczona ieſt proſtopadła Fig. 2.
CD

CD na przeciw proſtkątną AB; Troykąty trzy: ABC, ACD, CBD ſą względem ſiebie równokątne.

*Dowodz*: Troykąty ABC, ACD, maią kąt ſpolny A, i kąty ACB, ADC proſte, a zatym równe; trzeci przeto kąt w iednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Troykąty, równokątne. Podobnie i Troykąty proſtokątne ABC, CBD maią kąt ſpolny B, i ſą także równokątne.

W Troykątach równokątnych ABC, ACD, mamy proporcyą: AB : AC = AC : AD. w Troykątach: ABC, CBD będzie; AB : BC = BC : BD; a w Troykątach ADC, CDB; AD : DC = DC : BD. w Troykątach, ABC, ACD, ieſt też i ta proporcya: AB : BC = AC : CD.

To ieſt 1. W Troykącie proſtokątnym, bok ieden ieſt średnim Geometrycznie proporcyonalnym, między przeciw proſtkątną y odcinkiem mu przyległym, który czyni proſtopadła.

2. Wyſokość Troykąta proſtokątnego, ieſt średnią Geometrycznie proporcyonalną, między dwoma odcinkami przeciw-proſtkątney,

3. Przeciwprostkątna, dwa boki, i wysokość Troykąta postokątnego, są w proporcyi.

227. *Zagadn:* 6. Między dwiema danemi liniami, znaleść średnią Geometryczną.

*Sposob* 1. Złączywszy z sobą dwie dane linie, w iednę liniią prostą; na niey iako na średnicy nakreślmy połkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy prostopadłą aż do okrągu połkola. Ta prostopadła będzie średnią proporcyonalną, ktorey szukamy.

*Sposob* 2. Na większey z dwòch danych linii, iako na średnicy nakreślmy połkole. Na tę samę średnicę, od końca iey iednego, przenieśmy drugą mnieyszą liniią daną, a od tego punktu, gdzie się na średnicy konczyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okrągu połkola, i punkt zeyścia się z połkolem złączmy liniią z punktem tym średnicy, od którego przeniesiona była liniia mnieysza dana. Ta liniia łącząca te dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, ktorey szukamy.

# ROZDZIAŁ. IX.

## *O ſtoſunkach powierzchni Figur proſtokreślnych, w ogulności, a w ſzczegulnuści o ſtoſunkach Figur podobnych.*

228. TWierdz. 1. Gddy cztery liniie ſą w proporcyi Geometryczney; proſtokąt z dwóch ſkraynych, rów ny ieſt proſtokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzenie trzeba nayprzod obiaśnić na liczbach, ieżeli cztery liczby ſą Geometrycznie proporcyonalne, dwie ſkrayne rozmnożone iedna przez drugą, równe będą dwom średnim podobnie rozmnożonym. W każdey albowiem proporcyi Geometryczney równość zachodzi między dwoma ſtoſunkami Geometrycznemi, to ieſt tyle razy pierwſzy poprzednik zamykać w ſobie powinien ſwego naſtępnika, ile razy i drugi poprzednik zamyka także naſtępnika ſwego. Y tak naprzykład w tey proporcyi: 6 : 3 = 8 : 4, iak 6, zamyka w ſobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Ztąd wynika, że rozmnożenie ſkraynych i średnich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iedna-

dnakowe liczby, a tym ſamym okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak ſkraynych iako i śrzednich. Naprzykład, ponieważ $21 : 3 = 28 : 4$. i równie 21. zamyka w ſobie 3, iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatym tak 21 = 7, razy 3, iak 28 = 7. razy 4; więc 4 razy $21 = 4 \times 7 \times 3$; 3 razy $28 = 3 \times 7 \times 4$. A że $4 \times 7 \times 3 = 3 \times 7 \times 4$ więc i $4 \times 21 = 3 \times 28$.

Podobnie, ponieważ $16 : 12 = 20 : 15$ i tak 16 zamyka w ſobie 12, iak 20. zamyka 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16 = \frac{4}{3} \times 12$, iak i $20 = \frac{4}{3} \times 15$; idzie zatym, że tak $15 \times 16 = 15 \times \frac{4}{3} \times 12$; iako i $12 \times 20 = 12 \times \frac{4}{3} \times 15$.

Tak też ponieważ $8 : 28 = 10 : 35$, i $8 = \frac{2}{7} \times 28$, a $10 = \frac{2}{7} \times 35$; idzie zatym, że tak ieſt $35 \times 8 = 35 \times \frac{2}{7} \times 28$; iako też $28 \times 10 = 28 \times \frac{2}{7} \times 35$.

W ogulności zaś mówiąc, ieżeli ieſt $a : b = c : d$; i tak a, zamyka w ſobie b, iak, i c, zamyka d, razy n; będzie $a = n \times b$, i $c = n \times d$, a zatym tak $d \times a = d \times n \times b$. iako - - - $b \times c = b \times n \times d$.

Obiaśniwſzy to twierdzenie na wielu przykładach, przyſtąpi Nauczyciel do naſtępuiącego dowodzenia.

Niech

Fig. 3. Niech będą dwa proſtokąty: ABCD, BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą ſkraynemi tey proporcyi, którey boki BD, BF drugiego proſtokąta ſą średniemi; to ieſt niech ſię ma; AB: BF = BD: BC, w takim razie te dwa proſtokąty ſą równe.

*Wykreślenie.* Uſtawmy tak te dwa proſtokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B ſchodziły ſię, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia ſię w punkcie G.

*Dowodz.* Proſtokąty: AC, BC (w) których iednakowa ieſt wyſokość, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy AB, BF. Proſtokąty także BE, BG iednakowey wyſokości, maią ſię do ſiebie, iak ich Podſtawy; BD, BC. Aże z podania ieſt liniia AB, do BF, iak liniia BD : BC; więc też i proſtokąt AC tak ſię ma do proſtokątu BG, iak proſtokąt BE, do proſtokątu BG; czyli Proſt: AC : Proſt. BG = Proſt. BE : Proſt. BG, a zatym Proſt. AC = Proſt. BE, co ſamo krócey tak ſię wyraża.

AC:

(w) *Proſtokąty zwykły ſię wyrażać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napiſane.*

AC : BG = AB : BF

BE : BG = BD : BC

Aże AB : BF = BD : BC

więc AC : BG = BE : BG.

A zatym AC = BE.

229. *Wzaiemnie też* (Reciprocè, albo è converso) dowieść można, że ieżeli dwa Prostokąty są równe; wziąwszy dwa boki iednego za skrayne, a dwa boki drugiego za średnie wyrazy proporcyi, znaydziemy między temi bokami proporcyą.

W liczbach oczywiście się to pokazuie, bo gdyby boki dwa iednego Prostokąta wyrażone były przez liczby: 10, i 42. a boki drugiego przez 15, i 28, obadwa te prostokąty zawierałyby w sobie 420, naprzykład stop kwadratowych, to iest byłoby, 10 × 42 = 15 × 28, zkądby wypadła ta proporcya: 10 : 15 = 28 : 42.

Wykreślenie Geometryczne do tego Twierdzenia służące, nie odmienne byłoby od poprzedzaiącego. Dowodzenie także

że w środku dopiero działania różniłoby się; to iest: ponieważ.

$$AC : BG = AB : BF$$

$$\text{i } BE : BG = BD : BC$$

$$\text{A przez podanie } AC = BE.$$

$$\text{więc } AC : BG = BE : BG$$

$$\text{A zatym } AB : BF = BD : BC$$

230. *Wnioski* 1. Ponieważ w proporcyi, tenże sam być może następnik pierwszego stosunku, co i poprzednik drugiego; naprzykład: $8 : 4 = 4 : 2$, albo; $8 : 4 : 2$, przeto kwadrat z średniey linii Geometrycznie proporcyonalney, równa się też Prostokątowi z dwóch linii skraynych; i znowu, ieżeli kwadrat równy iest prostokątowi, bok kwadratu będzie linią średnią proporcionalną między bokami Prostokąta,

Te podania były wyłożone, w Rozdziałach szostym, i osmym, lubo sposobem odmiennym.

2. Można to samo przystosować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty iednego, równe były

kątom

kątom drugiego; także i do Troykątów, które kąt ieden ſpolny maią; bo ieżeli ramiona ich około tego kąta ſą proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Troykąta za ſkrayne, a dwa drugiego za średnie, te dwa Troykąty będą ſobie równe; i wzaiemnie to ztąd wynika, że takie Troykąty, ſą połowami dwoch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta ſpolnego.

3. Przyſtoſowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiaſt boku iednego, w obydwóch, wyſokość oznaczaną przez proſtopadłą, ſpuſzczoną od końca boku iednego na bok drugi; tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy Podſtawa i wyſokość iednego będą mogły być wzięte za dwie linije ſkrayne, a podſtawa i wyſokość drugiego za dwie linije średnie proporcyonalne; i wzaiemnie, ieżeli te cztery linije będą proporcyonalne, równoległoboki bądą też równe.

4. Jeżeli cztery linije ſą w proporcyi, można zawſze odmienić mieyſce dwom średnim, lub dwom ſkraynym, a nawet i dwie średnie położyć na mieyſu dwoch ſkraynych, lub ſkrayne na mieyſcu śre-

dnich, nie psuiąc proporcyi; ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z średnich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twierdz.* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem, poprowadziemy dwie linie, któreby okrąg koła przecinały po obydwóch stronach; prostokąt z dwóch części iedney z tych linii zawartych między tym punktem i okrągiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey linii zamkniętych także między tym punktem, i koła okrągiem.

*Fig.* 4. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cienciwy BC, ED; Prostokąt, EA × AD równy iest Prostoskątowi, BA × AC.

*Wykreśl.* Poprowadźmy linie, BD, EC.

*Dowodz.* Troykąty BAD, EAC są do siebie podobne, kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obeymuiące ramionami swemi tenże - sam łuk CD. Będą więc boki tych Troykątów proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC. a zatym AB × AC = AE × AD.

2. Niech

2. Niech będzie punkt A, za kołem, od tego punktu ciągnieymy dwie Linije AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Proſtokąty AB × AC, i AE × AD, będą równe. Fig. 5.

*Wykreśl.* Poprowadźmy liniie BD, EC.

*Dowodz.* Troykąty, BAD, EAC, maią kąt A, ſpolny i kąty B, i E równe, bo wſparte ramionami na tym ſamym łuku CD; więc te Troykąty maią boki proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC; a zatym, AB × AC = AE × AD.

To Twierdzenie zwykło ſię ieſzcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie cienciwy przecinaią ſię w kole, części ich będą *odwrotnie* (inversè albo in ratione inverſa) proporcyonalne; to ieſt: tak ſię będzie miała część iedney cienciwy, do części cienciwy drugiey iak ſię ma druga część cienciwy drugiey, do drugiey części cienciwy pierwſzey.

Dwie tedy części cienciwy iedney, będą średniemi proporcyi, a dwie części cienciwy drugiey będą ſkraynemi teyże proporcyi.

2. Gdy, dwie linie przecinaiące koło, wychodzą od iednego punku za kołem; są odwrotnie proporcyonalne z częściami temi, które za koło wychodzą; to ieſt, tak ſię ma iedna przecinaiąca do drugiey, iak ſię ma część drugiey za kołem, do części pierwſzey także za kołem: iedna tedy przecinaiąca, i część iey za kołem ſą średniemi w proporcyi, a druga przecinaiąca, i część iey także za kołem, ſą ſkraynemi tey ſamey proporcyi.

232. *Uwaga. W pierwſzym razie.* Gdy iedna z cienciw, ieſt średnicą koła, a druga do niey proſtopadłą; ta proſtopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzielona; i Proſtokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiey cieciwy. Proſtopadła tedy ſpuſzczona od któregokolwiek punktu koła, na średnicę, ieſt średnią Geometrycznie proporcyonalną między dwiema częściami średnicy; który to przypadek ſzczególny, i wyżey iuż ieſt dowiedziony.

*W drugim razie.* Gdy iedna z linii zamiaſt coby miała przecinać koło, ieſt *ſtyczną* (tangens) iego, można ią uważać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iey w kole niknie dla małości, i dwa iey punkta przecięcia ſchodzą ſię w punkt ieden.

W tym

W tym razie Prostokąt ieden, odmienia się na kwadrat z styczney. Y ztąd wynika to wielkiey wagi podanie; że ieżeli od iednego punktu, wychodzą dwie linije, iedna przecinaiąca koło, a druga styczna z kołem, kwadrat z styczney równać się będzie Prostokątowi z całey Linii przecinaiącey, i z części iey za kołem; czyli, to iest; że styczna iest średnią Geometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iey za kołem. Następuiące, dowodzenie iest ieszcze iaśnieysze, i bardziey pod oczy podpadaiące.

Niech będzie AD, styczna, AB zaś przecinaiąca koło, i od tegoż samego punktu A poprowadzona. Ta styczna AD iest średnią Geometryczną między przecinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołem. Fig. 6

*Wykreśl:* Od punktu dotkinięcia D, poporowadźmy dwie linije: DB, DC.

*Dowodz:* Troykąty: ABD, ADC, są do siebie podobne; maią albowiem spolny kąt A, i kąt odcinka, ADE, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatym i trzeci kąt w iednym Troykącie równy iest kątowi trzeciemu w drugim; będą więc tych Troykątów boki proporcyonalne, i AB : AD = AD : AC, to iest kwadrat z styczney AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

Fig. 7. 233. Wſzczegulności zaś niech będzie ſtyczna AT. i przecinaiąca AD, od tegoż ſamego punktu A poprowadzona, przez środek C, koła.

Pociągniymy promień CT do punktu dotknięcia T; kwadrat z linii AC, równy będzie ſummie kwadratów z AT, i CT, to ieſt: równy będzie ſummie z Proſtokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Zkąd wynika ten wnioſek, że ieżeli średnicę BD, podzielemy na dwie równe części w punkcie C, i potym na iey przedłużeniu, weźmiemy iak kolwiek punkt, naprzykład A; Proſtokąt z całey tey linii i z iey przedłużenia (AD × AB) z przydanym kwadratem, z połowy średnicy ($BC^2$.) równać ſię będzie kwadratowi z linii złożoney z połowy średnicy, i z iey przedłużenia ($AC^2$) to ieſt będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagad:* 1. Maiąc dany Proſtokąt, i kwdrat, znaleść dwie linije, ktoreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią, ten Proſtokąt i kwadrat.

*Rozwiąz.* Zamieńmy Proſtokąt dany na inny iemu równy, któryby za bok ieden, miał bok kwadratu; czyli (co na iedno wychodzi) ſzukaymy czwartey linii proporcyonalney do boku kwadratu, i do

dwóch

dwóch boków Proſtokąta. Bok kwadratu, tak ſię mieć będzie do tey czwartey proporcyonalney, iak ſię ma kwadrat do Proſtokąta.

To poſtępowanie zgadza ſię zupełnie z tym, co ſię iuż powiedziało w Arytmetyce (na karcie 89. i 90.) a co tu przez różne przykłady, podobne naſtępuiącemu obiaśnić ieſzcze należy.

Wziąwſzy bok kwadratu za ſpolną miarę, albo za iedność, niechby bok ieden Proſtokąta, zawierał w ſobie 5 razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwarta liniia proporcyonalna do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Proſtokąta, zawierałaby w ſobie 35. razy bok kwadratu, tak; iako i cały Proſtokat, zawierałby w ſobie 35 razy cały kwadrat.

235. *Przyſtosowane.* Podobnym ſpoſobem poſtąpiemy ſobie chcąc znaleść dwie liniie, któreby tak ſię miały do ſiebie, iak ſię maią dwa Proſtokąty; to ieſt, ſzukać będziemy czwartey proporcyonalney do boku iednego Proſtokąta, i dwóch boków drugiego; do tey albowiem czwartey proporcyonalney tak ſię mieć będzie drugi bok pierwſzego Proſtokąta, iak ſię maią powierzchnie tychże Proſtokątów.

Mo-

Możnaby to samo wykonać, szukaiąc sposobem wyżey wyrażonym (234) stosunku każdego z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiem, że powierzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwarte proporcyonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt ieden, który nazywam P. zawiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia L, zawiera w sobie bok B, kwadratu; to iest: że P : K = L : B.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiera w sobie ten sam kwadrat K, tyle razy, ile razy liniia M, zawiera w sobie bok B tegoż kwadratu; to iest: że Q:K = M: B, Wnoszę ztąd, że Prostokąty P, Q, tyle razy zawierać będą ieden drugi, ile razy się zawieraią liniie L. M. iedna w drugiey, to iest: że będzie, P: Q = L: M.

Jakoż ieżeli prostokąt P. zawiera w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, a prostokąt Q. zawiera naprzykład 6. razy kwadrat K, Prostokąt pierwszy, będzie do Prostokąta drugiego, iak są licz-

liczby ; 2, 3, 4, i t. d. do liczby: 6. Aże też i liniia L. zawiera w ſobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy, więc też i liniia M zawierać będzie bok B, razy 6; a zatym tak ſię ma Proſtokąt P, do Proſtokąta Q, iak liniia L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye; nap:

$P : K = L : B.$

i $Q : K = M : B.$

W których iednakowe ſą naſtępniki; poprzedniki pierwſze obydwóch proporcyi tak ſię do ſiebie będą miały, iak poprzedniki drugie tychże proporcyi to ieſt

$$P : Q = L : M.$$

236. *Uwaga*. W iedney z dwóch dopiero wyrażonych proporcyi, naprzykład w drugiey można było odmienić mieyſce poprzednikom, i naſtępnikom, i te ſame proporcye tak wyrazić :

$$P : K = L : B.$$

$$K : Q = B : M.$$

Zkąd wynika. $P : Q = L : M.$

237. *Defin*. Gdy będą trzy iakiekolwiek ilości iednakowego gatunku ſtoſunek pierw-

ſzey

ſzey z nich, do trzeciey nazywa ſię *ſtoſunkiem ſkładanym* (ratio compoſita) z ſtoſunku pierwſzey ilości, do drugiey, i drugiey do trzeciey. Y tak ſtoſunek P. do Q nazywa ſię ſkładanym z ſtoſunku P do K, i K do Q. Tak też ſtoſunek L do M będzie ſkładanym z ſtoſunku L do B, i B do M. Takie ſtoſunki złożone z ſtoſunków równych ſą równe. I tak ponieważ ſtoſunek P do K, i K do Q równy ieſt pierwſzy ſtoſunkowi L do B, drugi ſtoſunkowi B do M; będzie też i ſtoſunek ſkładany P. Q równy ſtoſunkowi ſkładanemu L do M.

238. *Przyſt:* 1. To, co ſię tu powiedziało o ſtoſunku ſkładanym, dobrze będzie przyſtoſować do reguły trzech ſkładaney, o którey mówiło ſię w Arytmetyce.

*Przykład.* Rzemieślinicy z iednakową pilnością pracuiący około iakiey roboty, tym więcey iey zrobią, im większa będzie ich liczba, i czas dłuższy ſtrawiony na teyże robocie. Przeto gdy porównać chcemy dwie iednakowego gatunku roboty któremi ſię dwie kupy Rzemieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako ſię to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzemieślników wygotowane, tak ſię będą do ſiebie miały, iak ſię maią tamte dwie liczby rozmnożone. Niech-

Niechy naprzykład liczby Rzemieślników były do siebie, iako 2 do 3; a czasy przez które robili iak 5. do 7. Pierwszy stosunek 2 do 3. równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5 rozmnożonych, i będzie, iak 10 do 15. Drugi stosunek 5 do 7; równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3 rozmnożonych, i będzie iak 15: do 21. A zatym stosunek robot, który się równa stosunkowi 10 do 21, równy będzie stosunkowi składnemu z stosunku 10 do 15, i 15 do 21; z których pierwszy równy iest stosunkokowi 2 do 3, a drugi równy stosunkowi 5 do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcey niż dwa będzie stosunków.

239. *Przysto*: 2 Wszystkie także działania o zamianach, i inne podobne, któremi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasadzały się na stosunkach złożonych z dwóch lub więcey stosunków równych, iako to bardzo łatwo w przykładach okazać można.

240. *Przysto*: 3. Same nawet niektóre działania, które zdaią się być tylko zwyczaynym mnożeniem, można podciągnąć pod stosunek składany.

*Przykład:* 1. 15. Czerwonych złotych ileż czyni groszy Polskich? Aby

Aby znaleść wartość 15. czerwonych złotych w groſzach, zwyczaynie obracaią ſię czerwone złote na złote, a te potym na groſze. Rozwiążem teraz to zadanie, roſkładaiąc ie na ſtoſunki poiedyncze, i ſzukaiąc ſtoſunku z nich złożonego; a to dla pokazania, że czaſem i niemyśląc o tym, używamy w ſamey rzeczy ſtoſunku ſkładanego.

Stoſunek wartości 15. czerw: do wartości w groſzach, ſkłada ſię z ſtoſunków następuiących:

1. Wartość 15. czer: zł. do wartości 1. czer: zł. ieſt, iak - - 15 do 1.

2. Wartość 1. czer: zł. do wartości 1, złotego - iak - - 18 do 1.

3 Wartość 1. złotego do wartości 1. groſza - iak - - 30 do 1.

4. Stoſunek z tych trzech złożony ieſt iak - - - - 8 100 do 1.

Więc 15. czerwonych złotych czyni groſzy - 8 100.

*Przykład* 2. Oſoba 30 lat maiąca, ileż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365?

Stoſunek 30 lat do iedney minuty ſkłada ſię z ſtoſunkow, następuiących:

Z Stosunku 30 lat do 1. roku, to iest, - - - - 30 do 1

Z Stosunku 1. roku do 1. dnia, to iest; - - - - 365 do 1,

Z Stosunku 1. dnia do 1. godziny, to iest; - - - 24 do 1,

Z Stosunku 1. godziny do 1. minuty; to iest; - - 60 do 1,

Stosunek z tych wszystkich złożony iest; - 15768000. do 1.

A zatym w 30 latach iest minut - - - 15768000.

241. *Przystos.* 4. Widzieliśmy wyżey, że dla znalezienia stosunku dwóch Prostokątów, trzeba było ieden z nich zamienić na inny, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaleść czwartą liniią proporcyonalną do iednego boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego; i że tak się ma pierwszy Prostokąt do drugiego, iak się ma drugi bok pierwszego prostokąta, do tey czwartey linii proporcyonalney. Zwyczaynie to podanie tak się wyraża: że *stosunek dwoch Prostokątów składa się z stosunków ich boków.* Co tak okazać można.

Niech

Niech będą dwa boki iednego Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiego prostokąta, C i D. Szukaymy czwartey linii proporcyonalney trzem bokom B, C, D, i ta niech będzie L; to iest niech będzie, B : C = D : L, stosunek linii A, to iest drugiego boku pierwszego prostokąta, do L, równy będzie stosunkowi pierwszego prostokąta, do drugiego (235.) Aże stosunek A do L składa się z stosunków, A do D, i D do L; stosunek zaś A do D, iest stosunkiem boku iednego, iednego Prostokąta do boku drugiego, drugiego Prostokąta; a stosunek D do L, równa się stosunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było; B : C = D : L.) *więc stosunek dwóch Prostokątów, składa się z stosunków ich boków.*

242. *Przyst.* 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porownywać mamy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe, kwadrat ieden tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma bok ieden pierwszego kwadratu do trzeciey linii proporcyonalney z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech naprzykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie liniia trzecia proporcyonalna do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. *Defin.* Ten ſtoſunek A do C, ſkłada ſię z ſtoſunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa oſtatnie ſtoſunki ſą równe; bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak ſtoſunek z nich złożony, nazywa ſię *dwumnożnym*, (Ratio duplicata) że wykładnik iego, ieſt kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwſzych ſtoſunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały ſię do ſiebie, iak 1. do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do ſiebie w tym ſamym ſtoſunku, w którym ieſt 1. do 4; trzecia też liniia proporcyonalna do 1. i 2, ieſt: 4; a zatym te dwa kwadraty tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię ma bok iednego z nich do trzeciey linii proporcyonalney.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do ſiebie, iak 2, do 3, powierzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzecia też liniia proporcyonalna do 2 i 3, ieſt: $\frac{9}{2}$, a ſtoſunek 2 do $\frac{9}{2}$ ieſt ten ſam, co i ſtoſunek 4 do 9.

Jako ſtoſunek pierwſzy naprzykład linii do trzeciey *ciągło* (continuè) proporcyonalney, nazywa ſię ſtoſunkiem dwumnożnym ſtoſunku pierwſzey linii do drugiey; tak

tak znowu ſtoſunek pierwſzey tey linii do drugiey, nazwać można ſtoſunkiem *dwudzielnym* (ratio ſubduplicata) ſtoſunku linii pierwſzey do trzeciey. Y tak gdy trzy linile przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, ſą ciągłe proporcyonalne, to ieſt 1 do 2, iak 2 do 4; albo 1 : 2 ; 4. Ponieważ pierwſza do trzeciey, to ieſt 1 do 4 ieſt w ſtoſunku dwumnożnym pierwſzey do drugiey, to ieſt iak $1^2$ do $2^2$; będzie znowu 1. do 2, w ſtoſunku dwudzielnym 1, do 4; to ieſt iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagadn:* 2. Maiąc dany kwadrat ieden, znaleść drugi, któryby do pierwſzego był w danym ſtoſunku.

*Rozwiąz.* Danemu ſtoſunkowi znaydźmy inny równy maiący za poprzednika bok kwadratu danego. Między tym porzednikiem, i naſtępnikiem iego, ſzukaymy średniey proporcyonalney, ta będzie bokiem kwadratu żądanego.

*Albo tak:* Złączmy wproſt z ſobą dwie liniie, maiące do ſiebie ten ſam ſtoſunek, który maią dwa wyrazy. naprzykład dwie liczby dane. Na tey linii z dwóch złożoney, iako na średnicy, nakreślmy połkole, i od punktu ich łączenia ſię wynieśmy proſtopadłą, aż do okrągu. Od punktu zey-

ścia

ścia się prostopadłey z okręgiem poprowadźmy dwie linie do dwóch końców średnicy, kwadraty tych dwóch linii, mieć będą do siebie stosunek; a zatym ieżeli iedna z nich równa iest bokowi kwadratu, danego, równa będzie bokowi kwadratu, którego szukamy. Jeżeli zaś pierwsza nie równa iest bokowi kwadratu danego, to trzeba na niey, zacząwszy od punktu iey przecięcia z okręgiem, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danego i od punktu naznaczonego prowadzić równoodległą od średnicy, a ta równoodległa przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanego.

To Zagadnienie przystosować należy do przykładów Arytmetycznych.

*Przykład.* 1. Znaleść kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danego, to iest, któryby tak się miał do niego, iak 3, do 5.

Bok kwadratu danego dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na średnicy kreslę półkole, a od punktu podziału wynoszę prostopadłą aż do iey spotkania się z okręgiem. Od tego punktu spodkania prowadzę linią do końca średnicy, w tę stro-

nę, gdzie część iey większa znayduie się. Ta linia będzie bokiem kwadratu szukanego.

*Przykład.* 2. Maiac dany kwadrat dobrać mu drugi, ktòryby tak się miał do niego, iak 5, do 3.

Liniią rówuą bokówi danego kwadratu przeciągniymy daley, aż takich 5 części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nieprzeciągniona zamykała.

Na teyże linii tak przeciągnioney, iak na średnicy nakreślmy połkole, i od punktu, od ktorego iest przedłużona, wyniesmy prostopadłą, aż do okrągu, i od tego punktu,gdzie go spotyka, poprowadźmy liniią do końca tego srednicy, gdzie część iey rówua się bokowi danego kwadratu. Ta ostatnia liniia będzie wymiarem boku kwadratu, ktòrego szukamy.

245. *Uwaga.* Rozwiązanie Arytmetyczne takowych zagadnień zasadza się na wyciągnieniu pierwiastku kwadratowego.

Gdy naprzykład znaleść potrzeba kwadrat, ktòryby był $\frac{3}{5}$. kwadratu danego, to iest, któryby tak się miał do niego iak 3 do 5; rózmnożywszy obiedwie te liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do

25;

25; Więc kwadrat, ktòrego ſzukamy tak ſię mieć będzie do kwadratu danego, iak 15 do 25, a zatym bok kwadratu, którego ſzukamy, będzie do boku kwadratu danego, iak ieſt liczba, która przez ſiebie rozmnożona czyni 15, do liczby, która przez ſiebie rozmnożona czyni 25; to ieſt: iak pierwiaſtek kwadratowy z 15 do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu ſzukanego, to ieſt trzeba znaleść średnią liczbę proporcyonalną między dwiema danemi. 3 i 5; rozmnożywſzy iedne przez drugą, i z rozmnożoney liczby 15, pierwiaſtek kwadratowy wyciągnowſzy.

Działanie więc Geometryczne zmierzające do znalezienia średniey linii proporcyonalney między dwiema danemi, ieſt to ſamo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiaſtku kwadratowego z liczby daney; co można i tym potwierdzić, że kwadrat liczby średniey Geometrycznie proporcyonalney między dwiema innemi, równa ſię tymże dwom liczbom przez ſiebie rozmnożonym; a zatym ta średnia liczba znaydzie ſię, wyciągaiąc pierwiaſtek kwadratowy z tych dwóch liczb, iedney przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Geometrycznie ſzukali kwadratu, któryby miał ſię do kwadratu

dratu danego w danym ſtoſunku, ſzukaliśmy przez wykreślenie, średniey linii Geometrycznie proporcyonalney między dwiema w danym ſtoſunku, będącemi, i ta średnia liniia była bokiem kwadratu ſzukanego.

246. Przyſtoſować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do innych iakichkolwiek figur proſtokreślnych, i do ſiebie podobnych. Pokaże ſię to nayprzod na Proſtokątach podobnych, potym na Troykątach, naoſtatek w ogulności na iakichkolwiek figurach proſtokreślnych.

Gdy będą dwa Proſtokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących ſobie zrobiemy dwa kwadraty, te dwa Proſtokąty, tak ſiebie mieć będą, iak te dwa kwadraty.

*Tab. XIV. Fig. 1.* Niech będą dwa proſtokąty podobne, ABCD, abcd; ich powierzchnie, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſię maią powiezchnie kwadratów ABEF, abef. zrobione na bokach odpowiadaiących ſobie; AB, ab. Jakoż Proſtokąt ABCD, tak ſię ma do kwadratu ABEF, iak wyſokość AD do wyſości AF = AB to ieſt:

ABCD : ABEF = AD : AB.

Podobnie abcd : abef. = ad : ab.

Aż:

Aże dla podobieńſtwa proſtokątów, ieſt też $AD : AB = ad : ab$, więc

$$ABCD : ABEF = abcd : abef.$$

albo, $$ABCD : abcd = ABEF : abef$$

To ſamo ieſzcze wyłożyć można ſpoſobem naſtępuiącym:

Niech dwie podſtawy dwóch Proſtokątów podobnych będą do ſiebie iak 5 do 3; wyſokości ich będą też w takowym ſtoſunku 5 do 3; azatym ieżeli podzielemy iednę podſtawę na 5, a drugą na 3, równe części, wyſokość także, iednę na 5 części równych, a drugą na 3 równe pierwſzym; powierzchnie tych dwóch Proſtokątów będą mogły być podzielone, pierwſza na 25, a druga na 9 części równych w obydwóch Proſtokątach, tak iak też i kwadraty na tych ſamych podſtawach zrobione mogłyby być podzielone, ieden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików, ztąd wypływa, że i Troykąty proſtokątne podobne, tak ſię maią do ſiebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących ſobie, bo także Troykąty ſą w ſamey rzeczy połowami proſtokątów podobnych, i maiących też ſamę, co one, podſtawę, i wyſokość. *Fig.* 2

247. Można ieszcze przystosować to samo i do iakichkolwiek Troykątów podobnych; ponieważ albowiem w podobnych Troykątach, wysokości są między sobą iak Podstawy, zatym prostokąty, ktòreby miały tey wielkości podstawy i wysokości, co i Troykąty, byłyby podobne, i miałyby się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246) więc, i Troykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie w stosunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniey to wyłożyć można, gdy stosunki boków wyrażone będą przez liczby.

Fig, 3. Niech będzie Troykąt iakikolwiek, którego podwoiłśmy wszystkie trzy boki. Ten drugi Troykąt zmieści w sobie 4 Troykąty, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli w tymże pierwszym Troykącie bok każdy potroiemy, ten drugi Troykąt zamknie w sobie 9 Troykątów, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwszym Troykącie tak przedłużemy, żeby dłuższy był

był był 4, 5, 6, i t. d. razy; ten drugi Troykąt pomieści w ſobie, 16, 25, 36, it. d Troykątów, mogących przyſtać do pierwſzego.

Przeto, ieżeli boki Troykąta iednego zawieraią w ſobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9 .. razy boki innego Troykąta; powierzchnia pierwſzego Troykąta zawierać będzie powiezchnią drugiego, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81. -- razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów, których boki zawieraią 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9. - - razy bok innego kwadratu, będą zawierać powierzchnią tego drugiego kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. - - razy.

Gdyby boki dwoch Troykątów podobnych miały ſię naprzykład do ſiebie, iak 5, do 7; możnaby w pierwſzym Troykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Tróykątów, których wſzyſtkich boki przyſtaćby mogły do ſiebie; a zatym powierzchnie tych dwoch Tróykątów miałyby ſię do ſiebie, iak 25, do 49; to ieſt iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do ſiebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego ſamego dowieść ſpoſobem podobnym, iakośmy dowodzi li,

li, że kwadraty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków. (242)

I tak, gdy będą dwa iakiekolwiek Tròykąty podobne, do których dwòch bokowodpowiadaiących sobie, znayduiemy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powierzchnia iednego Troykąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, iak bok pierwszego Troykąta, który wzięty iest za pierwszy wyraz proporcyi, do tey trzeciey linii proporcyonalney.

*Fig.* 4. Niech będą dwa Troykąty podobne, ABC, abc, znaydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powierzchnia Troykąta ABC, będzie do powierzchni Tròykąta abc, iak AB do AD.

*Wykreślenie.* Poprowadźmy liniią CD.

Ponieważ dla podobieństwa Troykątów iest: AB : ab = AC: ac, a przez wykreślenie AB : ab = ab: AD, będzie więc; AC : ac = ab: AD. a zatym Troykąty cab, CAD, maią kąty A i a równe, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalne; Będą tedy te dwa Troykąty równe co do powierzchni; a przeto sto-

ſtoſunek Troykąta ABC, do każdego z nich będzie iednakowy. A że ſtoſunek tegoż Troykąta ABC, do Tròykąta ADC, rowny ieſt ſtoſunkowi linii AB, do linii AD, więc też i Troykąt ABC tak ſię mieć będzie do Troykąta abc, iak liniia AB do linii AD; to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie ztąd, że i równoległoboki podobne ſą także między ſobą, w ſtoſunku dwumnożnym ich boków; ponieważ takie równoległoboki dwa razy w ſobie zamykaią Troykąty podobne.

248. Można także było równie dokładnie dowieść, że Troykąty podobne ABC, abc, ſą między ſobą w ſtoſunku dwumnożnym ich boków AC, ac; a zatym, że ſtoſunek dwumnożny AB do ab, równy ieſt ſtoſunkowi dwumnożnemu AC, do ac to ieſt; że ſtoſunki dwumnożne z równych ſtoſunków, ſą równe; co też iuż ſię ogulnie pokazało, mòwiąc wyżey o ſtoſunkach ſkładaiących z innych ſtoſunków.

Jakoż, niech będą trzy iakiekolwiek ilości ciągło proporcyonalne; A, B, C, i drugie trzy ciągło także proporcyonalne; a, b, c, i wrównym z pierwſzemi ſtoſunku. Stoſunek ſkładany A do C, równy będzie ſtoſunkowi, ſkładanemu *a* do *c*, to ieſt; A: C = a : c.

Bo

Bo. ponieważ ſtoſunek A do B równy wzieliśwy ſtoſunkowi a do b, będzie.

$A : B = a : b$; Aże $A : B = B : C$

i $a : b = b : c$

Więc $B : C = b : c$

azatym $A : C = a : c$

W liczbach to ſamo iaśniey ſię okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalne 8, 4, 2, i drugie trzy ciągło także i równie proporcyonalne; 12, 6, 3, będzie; $8 : 2 = 12 : 3$.

Ponieważ albowiem równe ſą ſtoſunki 8 do 4, i 12 do 6, będzie.

$8 : 4 = 12 : 6$; Aże, $8 : 4 = 4 : 2$.

i $12 : 6 = 6 : 3$.

Więc $4 : 2 = 6 : 3$

Azatym $8 : 2 = 12 : 3$.

249 *Podanie przybrane.* Gdy mamy iakiżkolwiek zbiór ſtoſunków równych,

których

których wyrazy wszystkie iednakowego są gatunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich następników, iak każdy w szczegulności poprzednik, do swego następnika.

Bo, ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamyka w sobie swoiego następnika, wszystkie też razem poprzedniki zamykać będą wszystkie razem następniki dwa, trzy, cztery i t. d. razy; á zatym summa wszystkich poprzedników, tyle razy zamykać będzie summę następników, ile każdy z osobna poprzednik, swego następnika,

I tak niech będą równe stosunki, 64 do 32; 50 do 25; 42, do 21; 30 do 15; 24 do 12; 18 do 9; 10 do 5; 8 do 4; 6, do 3; 4 do 2; 2 do 1. Summa wszystkich poprzedników $=$ 258, a summa wszystkich następników $=$ 129; będzie tedy, 258: 129 $=$ 64: 32; albo $=$ 50: 25; albo $=$ 42 : 21 i t. d.

250. *Twierdzenie*. 3. Jakiezkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

*Wy-*

Fig. 5. *Wykreśl*, Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowadzmy przekątne do innych kontów, do których mogą być poprowadzone.

*Dowodzenie.* Dwie te figury będą podzielone na Troykąty, które z osobna brane w iedney figurze, będą podobne Troykątom odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś wszczegulności Troykąt w iedney figurze, będzie do Troykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Troykąty, z których się składa iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie troykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatym summa wszystkich Troykątów, ktore składaią iednę figurę (to iest ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Troykątów, z których się składa druga figura (to iest do tey drugiey całey figury) iak się ma każdy wszczegulności Troykąt w iedney figurze, do Troykąta odpowiadaiącego w drugiey figurze; to iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszyst-

Wſzyſtko zatym, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku dwóch kwadratów i o ſpoſobie znalezienia kwadratów, któreby ſię miały do ſiebie w danym ſtoſunku, może być przyſtoſowane do iakichkolwiek figur proſtokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką proſtokreślną zrobić podobną i równą danym dwom innym podobnym figurom proſtokreślnym, trzeba tym końcem poſtawić Troykąt proſtokątny, dawſzy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące ſobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwproſtkątna tego Troykąta, będzie bokiem odpowiadaiącym w figurze, którey ſzukamy.

252. Gdy cztery liniie ſkładaią proporcyą, i na dwóch pierwſzych, wyrażaiących ieden ſtoſunek, zrobiemy dwie iakiekolwiek figury podobne, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi ſtoſunek, zrobiemy inne dwie iakiekolwiek figury podobne; w takim razie ſtoſunek dwóch pierwſzych figur, równy będzie ſtoſunkowi dwóch drugich, bo tak ſtoſunek dwóch pierwſzych figur, iako i ſtoſunek dwóch drugich, ieſt ſtoſunkiem dwom mnożnym z dwóch równych ſtoſunków.

Prawdzi

Prawdzi ſię to wſzczegulności, gdy wſzyſtkie cztery figury ſą ſobie podobne; a tym widoczniey ieſzcze ſię okazuie, gdy te cztery figury ſą kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wſzyſtkie ſą liniiami, Proſtokąt z poprzedników dwóch pierwſzych ſtoſunków, w każdey proporcyi tak ſię mieć będzie do Proſtokata z dwóch ich naſtępników, iak Proſtokąt z poprzedników, drugich dwóch ſtoſunków do Proſtokąta z ichże naſtępników.

Należy to obiaśnić nayprzod na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwòch pierwſzych ſtoſunków, w obydwóch proporcyach, ieden przez drugi rozmnożone, tak ſię mieć będą do ſwoich naſtępników przez ſiebie także rozmnożonych; iak i inne dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone, do ſwoich naſtępników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3.$

i znowu . $15 : 5 = 12 : 4.$

będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4.$

to ieſt. $210 : 35 = 72 : 12.$

To

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze twierdzić rozumowaniem podobnym następuiącemu: Jeżeli poprzednik w pierwszey proporcyi iest dwa razy naprzykład większy od swego następnika, a poprzednik w drugiey proporcyi, trzy razy naprzykład iest większy od swego także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszego poprzednika, pierwszey proporcyi, przez pierwszego poprzednika drugiey proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, to iest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników pierwszych, w obydwóch proporcyach rozmnożonego; a że i drugie dwa poprzedniki, są, ieden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników, więc tak pierwszy poprzednik, z dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik z dwóch drugich rozmnożouy, będzie sześć razy większy od swoiego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przystosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztery liniie składaiące pierwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d wyrażaią drugie cztery liniie składaiące drugą propor-

cyą; to ieſt: niech będzie; $A : B = C : D$. i $a : b = c : d$; będzie też $A \times a : B \times b = C \times c : D \times d$.

Bo nayprzod $A : B = Aa : Ba$.

i podobnie $C : D = Cc : Dc$.

Aże - $A : B = C : D$.

Więc - - $Aa : Ba = Cc : Dc$

Takteż znowu; $a : b = Ba : Bb$.

$c : d = Dc : Dd$.

Aże - $a : b = c : d$

Więc - - - $Ba : Bb = Dc : Dd$.

Stoſunek tedy złożony z ſtoſunków:

$Aa : Ba$.

i $Ba : Bb$.

To ieſt ſtoſunek $Aa : Bb$, równa ſię ſtoſunkowi złożonemu z ſtoſunków

$Cc : Dc$.

i $Dc : Dd$.

To ieſt ſtoſunkowi, $Cc : Dd$.

albo co na iedno wychodzi; $Aa : Bb = Cc : Dd$.

# ROZDZIAŁ. X.

## *O wielokątach foremnych.*

254. DEfini. Gdy wielokąt ma wſzyſtkie boki i kąty równe, nazywa ſię *Wielokątem foremnym* (Polygonum regulare.)

255. *Wnioſek.* Ponieważ ważność wſzyſtkich razem kątów wiel kąta zaw ſła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wſzyſtkie kąty wiełokąta ſą równe, ważność iednego z tych kąta, zawiſła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Ztąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową maiące liczbę boków, kąty też wſzyſtkie maią równe i boki proporcyonalne; ſą więc do ſiebie podobne. Można tedy przyſtoſować im to wſzyſtko, co ſię w ogulności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy iuż ſpoſob wykreślenia Troykąta równobocznego i kwadratu na linii daney, wiemy też iak wpiſać w Troykąt równoboczny, lub na nim opiſać koło.

W piſanie w koło dane, Troykata równobocznego, i opiſanie tegoż koła Troy-

kątem, łatwiey się wykonywa przez wykreślenie *Sześciokąta* foremnego (Hexagonum.)

256. *Twierdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanego, równy iest promieniowi tegoż koła.

*Tab. XV Fig.* 1. Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta na p: AB, równy iest promieniowi SB tegoż koła.

*Wykreślenie.* Poprowadzmy promień SA.

*Dowodz.* Kąt ASB, zamyka szostą część, czterech kątów prostych; to iest $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; aże trzy kąty Troykąta ASB, składaią dwa kąty proste, więc dwa kąty A i B tegoż Troykąta, razem wzięte są różnicą między dwoma kątami prostemi i $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego, to iest czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe, więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego: a zatym wszystkie trzy kąty Troykąta ASB są równe, i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli cienciwa 60. stopniów) równy promieniowi koła opisanego.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć iest przenieść 6 razy iako cienciwę promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona cienciwą trzeciey części okręgu koła, a zatym będzie bokiem Troykąta równobocznego wpisanego w dane koło. Pociągnąwszy tedy liniie AE, CE, Troykąt ACE, będzie Troykątem równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twierdzen.* 2 Gdy w koło wpisany będzie Troykąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów iego, pociągniemy styczne z kołem tak daleko, aż się z sobą zniydą, te styczne zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Troykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C. tego Troykąta prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą, w punktach D, E, F, zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany. *Fig.* 2.

*Wykreślenie.* Pociągniymy promienie SA, SB, SC.

*Dowodz:* Którykolwiek z kątów w środku koła, naprzykład kąt ASB, i iemu

przeciwny kąt E, między dwiema ftycznemi zawarty, czynią razem dwa kąty profte. Aże kąty wfzyftkie trzy w środku koła fą równe, więc równe będą i kąty trzy od ftycznych zrobione; a zatym i Troykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opifać można dane koło Troykątem równobocznym, wpifawfzy pierwey w toż koło Troykąt także równoboczny.

260. W ogulności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek Wielokąt foremny w koło wpifany; ieżeli przez wfzyftkie wierzchołki kątów tego Wielokąta poprowadziemy ftyczne koła, tak, aby każde dwie blifkie z fobą fię fpotykały; Wielokąt, który z tych ftycznych zrobi fię, będzie także foremnym.

*Dowodz*: We wfzyftkich czworokątach takich iak naprzykład ASBE, kąty między dwiema ftycznemi zawarte, iak naprzykład kąt E, będą równe; a zatym wfzyftkie kąty tego Wielokąta będą równe.

Wfzyftkie także Troykąty, iak naprzykład ABE będą równoramienne, i kąty w iednym Troykącie, równe będą kątom w drugim, i podftawy w nich, iak na-

naprzykład: ieſt podſtawa AB będą równe; a zatym wſzyſtkie te Troykąty mogą przyſtać do ſiebie, i ztąd boki iednego Troykąta równe będą bokom drugiego. Więc ſumma dwóch takich równych boków iednakowa zawſze będzie. Aże bok naprzykład EF ieſt ſummą dwóch takich równych boków Wielokąta opiſanego, więc wſzyſtkie boki tego Wielokąta równe będą.

261. *Twierdz.* 3. W każdy Wielokąt foremny, można wpiſać iedne koło, i drugie koło na nim opiſać, a obadwa te koła, ſpolny mieć będą środek.

Niech będzie iakikolwiek ſześciokąt foremny, ABCDEF, można zawſze wpiſać weń koło, i drugie na nim opiſać, a te dwa *koła* będą *ſpołśrodkowe*. (circuli concentrici.)

*Dowodz.* Od środka dwóch boków bliſkich, naprzykład od G, i H, wyprowadziwſzy dwie proſtopadłe: GS,HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków bliſkich A, B, C (według tego co ſię iuż powiedziało o opiſaniu kołem Troykąta) będą tedy równe linie AS, BS, CS; a zatym Troykąty SBC, SBA równe względem ſiebie *Fig.* 3.

boki

boki mieć będą, i ieden Troykąt przyſtać może do drugiego; a wſzczegulności kąt SBC, równy ieſt kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to ieſt kąta ABC. Aże też równe ſą i kąty SCB, SBC, więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatym kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Troykąty: SCD, SCB ſpolny bok: SC; równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Troykąty przyſtać do ſiebie; a wſzczególności liniie SB, SD równe będą. Więc to koło, którego środkiem ieſt S, i które przechodzi przez punkta bliſkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt naſtępuiący: D. Podobnym ſpoſobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E. i t. d.

Wſzyſtkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako ſię pokazało; a zatym dwa Troykąty naprzykład SBH, SBG, mogą przyſtać do ſiebie, bo maią kąty proſte przy H i G, bok ſpolny: SB, i kąty przy B równe; a wſzczegulności liniie SH, SG ſą równe; toż ſamo możnaby dowieść i względem innych proſtopadłych ſpuſzczonych od środka S, na

na boki wielokąta. Punkt tedy S, ieſt iednakowo odległy od wſzyſtkich boków Wielokąta, a zatym ieſt środkiem koła, któreby wpiſać można w Wielokąt.

262. *Twierdz.* 4, Maiąc Wielokąt foremny w koło wpiſany, a przeciąwſzy na dwie równe części łuk, którego cienciwą ieſt bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwſzy liniie do dwóch końców łuku, zrobi ſię z tych linii inny wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwſzy boków maiący.

1. Wſzyſtkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cienciwami połowy łuków równych.

2. Wſzyſtkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przypodſtawie Troykątów równoramiennych, i przyſtać do ſiebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, bedzie miał wſzyſtkie boki i Troykąty równe, a zatym będzie foremnym.

Podobnym ſpoſobem dowieść możnaby, że ieżeli boki Wielokąta, ſą cienciwami

tyluż

tyluż części koła, ile Wielokąt ma boków, ten Wielokąt będzie foremnym; a zatym wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagadn.* Na danym kwadracie opisać. i wypisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

*Rozwiąz:* 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie; punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

2. Prowadzę dwie średnie w kole, iednę do drugiey prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego; przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na kole, równa się kwadratowi średnicy iego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżey powiedziało, wynika, że przez *podziały*, (sub-

(ſubdiviſiones) ciągłe łuków na dwie części równe, można wpiſać wkoło Wielokąty, których liczba boków byłaby następuiąca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogulności.
- - - - $3 \times 2^{n.}$ (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogulności.
- - - - $4 \times 2^{n.}$

*Przeſtr.* Za pomocą ſamego liniału i Cerkla, nie można z zupełną dokładnością i pewnością, (to ieſt bez ſzukania takowego podziału cerklem) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych; a zatym z takową ſamą pomocą. nie można zawſze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby ſię przez liczby rozmnożne, z 3, lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcey razy wzięte.

266. *Twierd.* 5. Powierzchnia Wielokąta opiſanego na kole, a wſzegulności Wielokąta foremnego równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień tego

---

(x) *Co znaczą te wyrazy:* $3 \times 2^{n}$, $4 \times 2^{n}$. *da ſię poznać w Algebrze.*

tego koła, a za podſtawę *obwod* (Perimeter) tego Wielokąta.

*Wykreśl.* Od środka koła poprowadźmy liniie do wſzyſtkich wierzchołków Wielokąta.

*Dowodz.* Wielokąt podzielony będzie przez te liniie, na tyle Troykątów, ile ma boków; Troykąty zaś te maią za wyſokość promien koła, a za podſtawę boki Wielokąta; więc powierzchnia tych wſzyſtkich Troykątów, czyli powierzchnia Wielokąta, równa ieſt iednemu Troykątowi, któryby miał za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę obwod Wielokąta.

267. *Wnioſek.* Gdy rozmaite Wielokąty opiſane ſą na iednym kole; ich powierzchnie mieć ſię do ſiebie będą, iak obwody.

268. *Twierdzenie* 6. Powierzchnia Wielokąta foremnego, w koło wpiſanego, równa ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość promień tego koła, a za podſtawę, obwod wielokąta innego foremnego w toż koło wpiſanego, a tylko połowę tyle boków maiącego.

Nie-

Niechay naprzykład sześciokąt ABCD EF, wystawia nam iakikolwiek Wielokąt foremny, w koło wpisany, powierzchnia tego sześciokąta równa iest Troykątowi. maiącemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Troykąta równobocznego, wtoż samo koło wpisanego. Fig. 1.

*Dowodz.* Poprowadźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Troykąta równobocznego. Troykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość AG. Troykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość CG; a zatym czworokąt AS CB równa się Troykątowi, któryby miał albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mowić i o innych Czworokątach, zawartych między dwoma Wielokąta bokami przyległemi, i dwoma promieniami; summa więc powierzchni, wszystkich tych czworokątów. to iest powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się takiemu Troykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta innego foremnego, w toż koło wpisanego, a połowę tyle bokow maiącego.

*Przykład.* Powierzchnia Dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, równa

się

ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość, promień tego koła, a za podſtawę obwód ſzkściokąta, w toż koło wpiſanego, albo, (co na iedno wychodzi) równa ſię Proſtokątowi, któryby miał za wyſokość, promień tego koła, a za podſtawę, tenże promień, trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia ieſt trzy razy większa od kwadratu promienia, i ieſt rówwna $\frac{3}{4}$ kwadratu średnicy.

Twierdzenie to ſtoſuie ſię tylko do Wielokątów, których boki ſą parzyſte; naſtępuiące Twierdzenie przyſtoſować można do wſzyſtkich ogulnie Wielokątów foremnych.

269. *Twierdz.* 7. Powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpiſanego, równa ſię Troykątowi, maiącemu za wyſokość proſtopadłą ſpuſzczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podſtawę, obwod iego. (y)

*Dowodz.* Proſtopadłą tę uważać można, iak promień koła wpiſanego, lub wpiſać

(y) *Taka w ſzczegulności proſtopadła nazywa ſię z Greckiego apothema.*

ſać ſię mogącego w Wielokąt; a zatym twierdzenie to ieſt tylko przyſtoſowaniem wyżſzego (267.)

270. *Wnioſek.* Jeżeli od punktu iakiegokolwiek w Wielokącie foremnym, nawet i w tym, którego boki tylko wſzyſtkie ſą równe, ſpuściemy proſtopadłe do wſzyſtkich iego boków, te proſtopadłe dodane do ſiebie, iednakową zawſze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwſzy od tego ſamego punktu dwie linije do dwóch końców iednego z boków, powierzchnia Troykąta, temi liniiami zakończona, równa będzie Troykątowi maiącemu za podſtawę bok wielokąta, a za wyſokość proſtopadłą nań ſpuſzczoną; albo co na iedno wychodzi; powierzchnia ta równa będzie Troykątowi maiącemu za wyſokość bok Wielokąta, a za podſtawę, proſtopadłą nań ſpuſzczoną; a zatym powierzchnia całego Wielokąta równać ſię będzie Troykątowi, któryby miał za wyſokość bok tego Wielokąta, a za podſtawę ſummę wſzyſtkich proſtopadłych na boki iego ſpuſzczonych. Aże powierzchnia takowego Troykąta ieſt zawſze iednakowa, i wyſokość także iednakowa, więc i podſtawa, czyli ſumma wſzyſtkich proſtopad-

ſtopadłych iednakowa zawſze będzie, z ktoregokolwiek punktu Wielokąta, one ſpuściemy.

## WSTĘP DO ROZDZIAŁOW XI. i XII.

### *O używaniu Przenośnika, Cerkla proporcyanalnego, i o Podziale nazwanym* Nonniuſzem.

*Tab. XVI.* 271. *DEf. Przenośnik* (Transportator) ieſt to połkole, ktorego okrąg podzielony ieſt na ſtopnie, albo, gdy większy będzie, na pułſtopnie, i cwierci ſtopniów.

272. *Zagadn.* 1. Maiąc dany kąt na papierze, znaleść liczbę ſtopniów, którą w ſobie zamyka.

*Spoſob* 1. Przykładam środek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podſtawę tegoż przenośnika do iednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokaże w ſtopniach ważność iego.

*Spoſob* 2. Od wierzchołka kąta danego, iak od środka, promieniem równym pro-

promieniowi przenośnika, kreślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cerklem na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcem średnicy i drugim punktem, gdzie drugie ramie Cerkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach ważność kąta danego.

273. *Zagadn*, 2. Na linii daney, i przy punkcie na niey danym, zrobić kąt zawieraiący w sobie daną liczbę stopniów.

*Sposob* 1. Położywszy na linii daney przenośnik, tak, aby średnica iego, do tey linii przystawała, a środek do punktu danego, naznaczam na papierze punkt, ktòremu odpowiada punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną stopniów, ten punkt łączę liniią z punktem danym, a ta liniia uczyni z daną kąt, którego szukałem.

To działanie będzie dokładnieysze, gdy przenośnik ma sobie przydany promień ruchomy około środka iego.

*Sposob* 2. Od punktu danego; iak od środka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kreślę łuk, i na ten, wziętą

wziętą na przynośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięcia linii z tym łukiem, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten ostatni złączywszy linią z puktem danym na drugiey linii, te obiedwie linie zamykać będą kąt, którego szukałem.

274. *Zagadn.* 3. W dane koło, wpisać Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

*Rozwiąz.* Szukam kąta w środku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w środku Wielokąta, maiący środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za cienciwę bok Wielokąta danego.

275. *Zagad.* 4 Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny o pewney liczbie boków.

*Rozwiąz.* Przy dwóch końcach daney linii robię dwa kąty równe połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukam. Punkt przecięcia ramion tych dwóch końców będzie środkiem koła, w które wpisać się da Wielokąt, o tylu bokach, ile ich dano, i tey wielkości, iakiey iest linia dana.

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciąga wielkiey baczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniey obawiać się trzeba znacznieyszego iakiego uchybienia.

Między innemi narzędzia tego niedostatkami, iest ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedostatek zastąpić może w potrzebie inne narzędzie nazwane *liniią cienciw* (Liniia chordarum) w cerklu proporcyonalnym.

277. Na obydwóch ramionach cerkla proporcyonalnego, znayduie się *liniia cienciw*, którey podziały zaczynaią się w środku (in centro) tego narzędzia; a miara tam, gdzie iest liczba: 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie iest liczba 60. Odległości środka od innych punktów podziału, pokazuią wielkość cienciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cienciw wyznaczona iest w połkole, którego promień równa się odległości środka cerkla proporcyolnego od punktu podziału naznaczonenego liczbą 60; a to z przyczyny równości cienciwy 60; stopniów z promieniem. *Tab. XVII.*

R Po-

Ponieważ rozwiązanie czterech poprzedzaiących zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cienciwy łuku, to iest od wielkości iey względem promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać, używaiąc, iednego tylko ramienia w cerklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: o, i 60.

Dwa razem ramiona tego cerkla służą do odmienienia promienia; naymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy Cerkiel proporcyonalny zupełnie iest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cerkiel coraz więcey otworzemy; a naywiększym będzie, gdy cerkiel cale tak otworzemy, że ramiona iego w prostey będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony cerkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie naprzykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatym odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cienciwę stopniów 40, albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów

któw 60 i 60; bo cienciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kół promienie. W ogulności więc mowiąc: gdy za promień weźmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cienciw, iakażkolwiek inna odległość dwóch punktów na teyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cienciwą łuku, o tylu stopniach, ile wyraża ta liczba.

Ztąd wynika sposob, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cienciw, i odmieniaiąc iak się podoba promień.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niey, także danym zrobić kąt o pewney liczbie stopniów.

*Rozwiąz*: Weźmy iakikolwiek promień; otworzmy cerkieł proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od środka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i daymy mu cienciwę równą odległości dwoch punktow naznaczonych liczbą daną stopniów.

279. *Przykł.* 2. Na daney linii wkreślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

*Rozwiąz.* Szukaymy kąta, iaki być powinien w środku Wielokąta żądanego; otworzmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cienciw tą liczbą, iaka ieſt liczba ſtopniów kąta, w środku, Wielokąta, równała ſię linii daney; na teyże linii wyſtawmy Troykąt równoramienny, odawſzy mu za ramiona, liniie równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Troykąta, będzie środkiem koła, w które wpiſać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w ſzczegulności: aby ſię obeyść można bez ſzukania kątów w środku, znayduie ſię na cerklu proporcyonalnym oſobna liniia Wielokątów, za którey pomocą, zacząwſzy od Troykąta, lub Czworokąta, aż do dwónaſtokąta, wykreślić można. Odległość środka, tego narzędzia, od punktu 6, tey linji Wielokątów, wziąwſzy za promień, albo za bok Sześciokąta foremnego w koło wpiſanego, odległości, tegoż środka od punktów: 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta foremnego, który wpi-

ſać

ſać można w to ſamo koło, o tylu bokach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo też*: otworzywſzy do woli cerkiel proporcyonalny, i wziąwſzy na linii Wielokątów za promień, odległość punktów 6, i 6; odległości innych dwóch punktów: 3, i 3; 4, i 4; 5, i 5; i t. d. pokażą bok Wielokąta foremnego o teyże ſamey liczbie boków wpiſanego w to koło, do którego za promień wzieliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecia liniia, którą na cerklu proporcyonalnym znayduiemy, a wielkiego ieſt użytku, nazywa ſię *liniią części równych.* Na obydwóch cerklu proporcyonalnego ramionach, mamy liniią podzieloną na 200. części równych, a czaſem, gdy cerkiel mnieyſzy, na 120, mniey lub więcey. Jakożkolwiek ten cerkiel otworzemy, odległość dwoch Punktów naznaczonych tą ſamą liczbą naprzykład 200, będzie dwa razy więkſza od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy więkſza od odległości dwoch punktów, 50; i t. d. a mówiąc ogulnie: odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą ſamą liczbą naznaczonych, będzie ſię tak miała do odległości dwóch innych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak ſię maią do ſiebie też liczby.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniią podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby naprzykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części równych,

Otworżmy tak cerkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5. równa była linii daney; niech naprzykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczbą: 200; weźmy piątą część tey liczby, to iest 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40: będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga.* Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybienie któreby zayść mogło w iey wielkości, byłoby 5 razy powtorzone, a zatym tak powtorzone, mogło by się stać znacznym, chociaż każde z osobna było nieznaczne. Przytrafić się to może osobliwie w ten czas, gdy na wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepiey będzie wziąść osobno $\frac{4}{5}$ linii, to iest odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obydwoch końców na linią daną; toż uczynić, wziąwszy potym $\frac{3}{5}$. linii i t. d.

284. *Używanie* 2. Maiąc daną liniią znaleść inną, którąby do niey była w pewnym ſtoſunku, w liczbach wyrażonym naprzykład iak 4 do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta, naznaczone liczbą podzielną przez 7, naprzykład na dwa punkta: 140; $\frac{4}{7}$ tey liczby 140, ſą 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, którey ſzukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w liczbach trzy boki Troykąta, wykreślić go.

*Przykład.* Niechby trzy boki Troykąta miały być, iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otworżmy iakokolwiek cerkiel proporcyonalny; odległości dwóch Punktów: 150 dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do ſiebie, iak boki dane; a zatym mogą być wzięte za te boki.

286. *Używanie* 4. Maiąc dany Troykąt iuż wykreślony, którego podſtawa zamyka naprzykład 100, ſznurów, znaleść wielkość innych dwóch boków.

Przenieśmy podſtawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cerklem długość

dwóch

dwóch innych boków, i przenieśmy ią znòwu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczone, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na ktòre długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w ſznurach.

Opuſzczam inne używania, gdzie wykreślenie Geometryczne, krótſze ieſt często, i pewnieyſze; iak naprz: w znalezieniu kwadratu, równego ſummie dwóch innych danych, albo więcey.

287. *Uważ*: 1. Gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, może na mieyſce iego, a czaſem i lepiey użyć linii podzieloney na wiele części równych.

288. *Uwa*: 2. Gdy część naymnieyſza, którey nam do podziału potrzeba, ieſt bardzo mała, a liczba części których ſzukamy znacznie wielka; w takim razie trudno ieſt mieć wſzyſtkie, na teyże ſamey linii, podziały, tak aby ie dobrze rozeznać można. Udamy ſię więc w podobnym razie do ſpoſobu naſtępuiącego:

*Tab. XV. Fig.* 4. Niechby podana była liniia, ktòra zbyt ieſt mała, aby ią widocznie na 10, części podzielić można; trzeba oſobno te części wynaleść od 1, aż do 10.

*Roz-*

*Rożwiąz.* Przez dwa końce tey linii prowadzę, po iedney ſtronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przenoſzę od końców linii daney dzieſięć równych części; każdy Punkt podziału w iedney równoodległey, łączę liniią z punktem odpowiadaiącym mu na drugiey równoodległey. (Te liniie łączące będą równoodległe od linii daney) Od końca iednego linii daney, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii oſtatniey równoodległey od daney; Ta poprzeczna liniia wyznaczy na równoodległych od linii daney, częci których ſzukałem.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzielenia na 100, równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła być widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niey można, ile zechcemy, zacząwſzy od 1, aż do 100. *Fig.* 5.

*Rozwiąz.* Podzielmy tę liniią na 10, równych części; przez pierwſzy punkt podziału, y przez drugi koniec tey linii, wyciągniymy dwie równoodległe iakiekolwiek, (zręczniey iednak, i wygodniey ieſt, aby mało co od proſtopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na te dwie równoodległe 10, części, równych, albo mało różniących ſię od części linii daney.

Złą-

Złączmy drugi koniec linii daney, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktem podziału równoodległey bliższey; złączmy także i punkta iedney równey odległey z punktami odpowiadaiącemi na drugiey, i przeciągniymy ie aż do linii ostatniey nierównoodległey. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii daney prowadzmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyidzie, przeniozszy podziały linii daney. na liniią iey przeciwną i łączącą końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziału odpowiadaiące. Po takim wykreśleniu, mieć zaraz można tyle co chcemy części równych na linii daney, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba naprzykład znaleść nam części 64. takich, iakich liniia dana ma 100.

Stawmy ramie iedne cerkla zwyczaynego na punkcie średnim, 4. i otwórzmy cerkiel tak szeroko, aż drugie ramie iego przypadnie na przecięcie dwóch linii, których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cerkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Przedłużaiąc liniią daną, i wszystkie od niey równoodległe, aż poki te przedłu-

że-

żenia nie będą równe linii daney wziętey raz, dwa razy, trzy razy -- dziesięć razy, otrzymamy taką liczbę części, iaką zechcemy, założywszy od 1, aż do 200, 300, 400. -- 1000.

Taka *podziałka* (scala) iest do używania naywygodnieysza, gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, dla tego też inaywięcey iey używaią.

289. Jnny sposob do wynalezienia części równych linii daney, tak małey, że iey podzielić widocznie nie można na części żądane, iest ten, ktory się nazywa *podziałem Nonniusza*, a który raczey nazywać by się powinien podziałem *Verniera*, z przyczyny, że tak zwał się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby naprzykład przyszło podzielić na 30 równych części liniią tak mała, że widocznie na niey części, tych wyznaczyć nie można, niechby iednak była wielkości, że można ią wyraznie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielmy te liniią naprzykłd na 6. części równych, i drugą iey równą, na 5 równych także części. Rożnica szostey części pierwszego podziału, od piątey części Fig. 6.

dru-

drugiego podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całey tey linii daney, to iest będzie $\frac{1}{30}$ tey linii. Gdy tedy te dwie liniie tak ułożemy, że iedna będzie przy drugiey, i końce iedney wprost będą na przeciwko końców drugiey; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obydwóch liniach, będzie 30stą częścią daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżey końców) będzie: $\frac{2}{30}$; odległość dwóch punktów trzeciego podziału: $\frac{3}{30}$, czwartego: $\frac{4}{30}$, piątego: $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$. stą częścią całey linii daney; to iest iedną z tych części, na które ta liniia iest podzielona.

*Tab. XVII.* 290. Czwarta liniia, która ieszcze zwykła się znaydować na cerklach proporcyonalnych, i którey wykreślenie zasadza się na tym; co się wyżey iuż wyłożyło, nazwana iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum)

Odległości środka w cerklu proporcyonalnym od punktów podziału tey linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stosunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażone. Y tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36,

49,

49, 64, razy większy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu większy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 razy od pierwszego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daley tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach średnich między temi, które się dopiero wyraziły; można ie wyznaczyć przez figurę dokładną, lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwey. Y tak ieżeli odległość środka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 iakim częściom; odległość tegoż środka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy blisko 17. takimże częściom; albo gdy pierwsza odległość znaczy nap: 100, druga znaczyć będzie troche więcey iak 141, i t. d.

Używanie w tym, dwóch ramion cerkla proporcyonalnego, iest to samo, które było i do innych linii.

Ponieważ naprzykład odległości środka od punktów:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 62, |
| | | | | | | | | ma'ą się |
| Do siebie, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8; |
| iak liczby: | | - | | - | | - | | więc też |

i odległości dwóch punktów iednakową liczbą nazczonych:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, |
| | | | | | | | | Przy iakim- |
| kolwiek o- | | - | | - | | - | | - |
| twieraniu | | - | | - | | - | | - |
| celrka, mieć | | - | | - | | - | | - |
| się będą iak | | - | | - | | - | | - |
| liczby | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, |

Toż mowić i o innych liczbach pośrednich.

*Pryystosowanie* Niech będzie dany bok kwadratu iednego; trzeba znaleść bok innego kwadratu, ktoryby był $\frac{5}{6}$, pierwizego.

Otwieram tak cerkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cerkla zwyczaynego, z otwartością rowną bokowi danemu, przypadły na dwa punkta Linii płaszczyzn, iednakową liczbą naznaczone, którąby podzielona być mogła przez 6; naprzykład na dwa punkta: 60. Biorę $\frac{5}{6}$. tey liczby 60, to iest: 50; i nieodmieniaiąc otwarcia cer-

cerkla proporcyonalnego, mierze odległość dwóch punktów: 50; a ta będzie linią którey ſzukśm za bok kwadratowi, maiącemu być $\frac{5}{6}$, kwadratu danego; aże figury podobne maią ſię do ſiebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących ſobie, przeto działanie to przyſtoſować równie można do wſzyſtkich figur podobnych.

## ROZDZIAŁ XI.

### *Pierwſze początki Miernictwa.*

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to ſzczególniey gdy ſię wykreślaią na papierze figury, choć w małości ſwoiey, podobne tym, których ſą wyobrażeniem; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu naprzykład znayduiących ſię, których tam dla różnych zawad wyznaczyć częſtokroć nie można.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowa, którey bok zmierzony, ma łokci 10.

Jakieykolwiek wielkości kwadrat odryſuiemy na papierze, zawſze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Zeby

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papierze odrysowany, można sobie wystawić wielkość tey izby trzeba położyć ioznaczyć *Podziałkę*, według którey bok izby przenieśliśmy na papier: bo inaczey zapatruiąc się na ten ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko iaka iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze; iaka iey wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątem, maiącym długość łokci naprzykład 12, a szerokości łokci 8; odrysowawszy na papierze iakikolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wystawiłby nam iey figurę, ale nie wielkość; która dopiero w ten czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w iakim mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się, czyli to przypisuiąc do boku odsowanego, że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaka iest długość na papierze wyrażaiąca łokci 10, i t. d.

Mierząc podobnie długość i szerokość domow, dziedzinców, ulic grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te, iedne względem drugich położenia i wielkość każdey z osobna części nap: budynku i t. d.

Można

Można potym i drobnieyſze części wyrazić, kładąc położenia drzwi, okien, i t.d. aby pod ieden razem widok poddać budynek cały i z iego częściami.

Kilkakrótnie takowe roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coraz większey łatwości.

292. *Przykład.* 2. Niech będzie na polu Troykąt, którego, boki wſzyſtkie zmierzyć można; ieden z tych boków zawiera łokci: 180, drugi: 164, trzeci: 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według niey zrobmy Troykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z tey podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Troykąt ma boki w tym ſamym ſtoſunku, w którym ſą boki Troykąta wielkiego, na polu naprzykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Troykąta różnić ſię nie będzie, tylko ſamą wielkością; a zatym będzie nam go mogł wyobrażić, i da nawet poznać ſamę wielkość iego, gdy na papierze wyraziemy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W oſtatnim przykładzie, długości do mierzenia, były przywiękſze,

a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, naprzykład łokcia, robota, byłaby długa, i bardzo pracowita; a nadewſzyſtko uchybienia, małe, kórych ſię ciężko uchronić, wpzykładaniach naſtępnych miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znaycznieyſzą, im częściey byłyby powtorzone. Z tego powodu, wnioſło ſię używanie ſążni, prętów, a nawet i ſznurów, na mieyſce łokci.

Do wymiarów tedy długości znacznieyſzey, należy mieć ſznur, a ieſzcze lepiey łańcuch, który pewną liczbę łokci albo ſążni w ſobie zamyka. Daymy naprzykład, że łańcuch którego używamy, ma w ſobie 10, ſążni. Takowy łańcuch, do długości 180, łokci, przyłożyć trzeba naſtępnie ſześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatym wymiar i prędſzy i pewnieyſzy. W takowych wymiarach wielkiey baczności potrzeba.

1. Należy być zapewnionym, że miary brane ſą w linii proſtey.

Tym końcem rozſtawuią ſię żerdzie, w pewney od ſiebie odległości, i w tey linii, którą mierzyć przypada, tak; aby pierwſza żerdź zaſłaniała naſtępuiące, a oſobliwie drugi koniec linii do mierzenia:

trzeba

trzeba także te żerdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum.)

2, Jeżeli na końcu linii do mierzenia nieznayduie się iaki cel znaczny, naprzykład drzewo, rog domu, i t. d. trzeba tam osobliwie gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, naprzykład żerdź wysoką z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z innym podobnym znakiem.

3. Trzeba ieszcze uważać, aby przykładania nastepne miary, były w linii prostey; według drogi od żerdziów wyznaczoney. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dać znak drugiemu trzymaiącemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w teyże samey linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostey niesechodzili.



---

(z) *Linią prostopadłą do iakiey płaszczyzny*, poziomey (*horizontalis*) *nazywać będziemy* Pionową (*verticalis*)

4. Trzeba ſię ſtarać, aby przy każdym przykładaniu miary, łańcuch, lub ſznur, iak naybardziey był wyciągniony; dlatego należy go do ſamey ziemi przyſtawiać, ieżeli ta równa ieſt wſzędzie; albo też wſpierać go na podporach w pewney odległości rozſtawionych; a tym ſpoſobem nachylenie, które cieżar łańcucha, lub ſznura ſprawuie, będzie mniey znaczne.

Y dla tegoć to, w robotach wielkiey wagi, i oſobliwey dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani ſznura używać nie można.

5. Trzeba ieſzcze mieć baczność, aby do tego ſamego mieyſca, gdzie ſię miara iedna ſkoczyła, przykładać znowu koniec ſznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub koł w to mieyſce, w którym ſię miara przeſzła zakończyła, a naſtępuiąca ma ſię zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy ſię łańcuch, lub ſznur w całym wymiarze przykładał; i aby o tym dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć, lepiey ieſt za każdym razem naznaczyć ſobie to przykładanie, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdego wſzczegulności wymiaru, znak iaki.

7.

7. Beſpieczniey także ieſt, powtórzyć zawſze wymiar całey długości.

8. Jeżeli pole do wymierzenia całe ieſt otwarte, i wolne, można go podzielić na Troykąty; czyli to prowadząc wſzyſtkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za ſpolną podſtawę tylu Troykątów, ile będzie pozoſtałych rogów; czyli ieſzcze wyznaczaiąc punkt w ſamym polu, i uważaiąc go iak wierzchołek, albo raczey zbieg tylu Troykątów, ile figura, którą odryſować chcemy, ma boków. Zmierzy wſzy potym wſzyſtkie boki wſzyſtkich tych Troykątów, można będzie odryſować na papierze figurę podobną.

294. *Przeſtroga.* Ten ſpoſob poſtępowania, w odryſowaniu pola, mierząc w iſtocie wſzyſtkie liniie do tego potrzebne; i czaſu wiele zabiera, i rzadko nawet trafia ſię, aby pole tak było wolne, żeby na nim ſpoſobu tego użyć można.

Jnnych zatym użyć trzeba w tym razie ſpoſobów, które ſę tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyſzych i proſtſzych; Poſtrzedz tu łatwo będzie można, iż używanie ſpoſobów trudnieyſzych i bardziey zawikłanych, nie zawiſło od prawideł Geometrycznych, których grunt tenże

amſ

ſam ieſt zawſze i iednakowa dokładność, ale zprzyczyny niedoſkonałości zmyſłów naſzych, i ręcznych działań.

295. *Zagadn*: Znaleść iakiego celu odległość nie mierząc iey *bezśrednie* (imediaté) czyli nie udaiąc ſię wproſt, aż do ſamego celu.

*Spoſob* 1. W którym ſamych ſię tylko żerdzi lub kołow używa.

1. Wymierzmy podſtawę iaką, którąby ſię ziedney ſtrony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podſtawa (dla większey w praktyce dokładności) powinna być tym dłużſza, im odległość celu, okiem miarkowana, zdaie ſię być znacznieyſza. Dla teyże w praktyce dokładności, trzeba ieſzcze takie położenie wybrać tey podſtawie, aby proſtopadła, którąby do niey od celu ſpuścić można, iak nayblizey iey środka przypadła; ponieważ ze wſzyſtkich innych teyże długości podſtaw, podſtwa z takim położeniem ieſt naywygodnieyſza.

2. Wytknieymy kołami uſtawionemi od obydwóch podſtawy końców, dwie linie, ku celowi, którego ſzukamy, prowadzące.

3.

3, Zmierzmy od iednego końca podſtawy, dwie iakiekolwiek długości, iednę na podſtawie, a drugą na linii koładnę mi, wyznaczoney; zmierzmy nadto, i odległość końców, tych dwoch długości iuż wymierzonych. Zrobmy to ſamo i z drugiego końca podſtawy.

Maiąc te na ziemi wymiary, możemy na papierze odryſować Troykąt podobny temu, który ma za podſtawę liniią na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości ſzukamy.

Jakoż wyraziwſzy na papierze, podſtawę przez liniią iakąkolwiek, można będzie przy obydwóch końcach tey linii odryſować dwa Troykąty, których boki takby ſię miały do ſiebie, iak ſię maią długości na ziemi wymierzone (pod liczbą 3 );a zatym i liniie któreſię ciągneły od końców podſtawy na ziemi, do punktu, którego odległości ſzukamy, będą tak do tey podſtawy nachylone, iak i liniie dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącey podſtawę prowadzone, nachylaią ſię do teyże podſtawy.

296. *Przeſtroga* Ten ſposób wielkiey bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoſzeniu ich

na

na papier. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie ſą znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna; gdy naptzykład wyobrażenie tylko chcemy ſobie uczynić nie znaiomey odległości iakiego celu: wyznaczenie według tego ſpoſobu położenia punktu iakiego niedoſtępnege, od tego zawiſło, aby doyiść nachylenia iedney linii wiadomey, to ieſt podſtawy, do dwóch innych, prowadzonych od obywóch końców teyże podſtawy, ku punktowi, ktòrego położenia ſzukamy; ponieważ gatunek Troykąta, temi trzema liniiami zawartego, a zatym i ſtoſunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez te nachylenia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Jnſtrumentum Goniometricum) ſą to dwa narzędzia ſzczególniey używane do wyznaczenia bezśrednie takowych nachyleń.

*Spoſob 2. Przez ſtolik Geometryczny.*

297. Niebawiącſię nad opiſaniem tego narzędzia, i ſztuk do niego należących (bo ſamo rzucenie oka, dopieroż używanie, więcey w tey mierzè nauczy, niż opis choćby też nayobſzernieyſzy) przeſtrzedz tylko, należy, że lepiey ieſt mieć przy ſtoliku, gdy kogo ſtać na to perſpe-

ktywy-

ktywy opatrzone nitkami, w kąt prosty przecinaiącemi się, niżeli proste *Celowniki* (dioptræ) i że tenże stolik ustawić należy *poziemnie* (horisontaliter) iak będzie można nayrówniey, do czego *prawidła* (Alidadæ) *albo* Regulæ (a) z ruchomemi perspektywami, daleko są lepsze, niżeli te, przy których perspektywy lub Celowniki są nie ruchome. (b)

Aby wyznaczyć przez stolik, odległość tę, w którey od iakiego punktu nie dostępnego zostaiemy; powinna do tego wymierzona być podstawa na ziemi, z ostrożnościami wyżey wzmiankowanemi, co do iey położenia i wielkości; trzeba potym postawić stolik na końcu iednym tey podstawy; i wyrazić tam iey długość; i położenie, ato przez liniią kierowaną przez prawidło wzdłuż teyże podstawy ustawione. Nachylenie podstawy do linii popro-

---

(a) *Prawidło iedno iest co i liniał; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączy się razem i spaia z celownikami lub Perspektywami, dla tego się odmiennego nazwiska użyło.*

(b) *Celowniki im są wyższe, tym lepsze, bo bez nachylenia, lub podniesienia stolika, można przez nie widzieć Cel iaki na dole; lub w gorze wystawiony.*

poprowadzoney od iey końca ku punktowi niedoſtępnemu, wyraziemy na ſtoliku, przez liniią od końca podſtawy wiedzioną przy prawidle, ku temuż punktowi zkierowanym. To zrobiwſzy, przenieſiemy ſtolik na drugi koniec podſtawy, na ziemi wymierzoney, i podobnie ſobie, iak przy pierwſzym końcu podſtawy poſtąpiemy, ciągnąc znowu przy prawidle, liniią od końca drugiego podſtawy na ſtoliku wyrażoney, ku punktowi, którego odległości ſzukamy. Troykąt wykreślony tym ſpoſobem na ſtoliku podobny będzie Troykątowi na ziemi, zamkniętemu między podſtawą wymierzoną, i dwoma bokami, któreby od iey końców prowadzone ſchodziły ſię w punkcie zoſtaiącym w odległości niedoſtępney; a zatym wielkości linii na ſtoliku wykreślonych, i podług podziałki wymierzonych, dadzą nam poznać i wielkości linii odpowiadaiących na ziemi. Y tak niechby naprzykład długość podſtawy na ziemi, była: 200 ſążni, którą wyraża na ſtoliku liniia zamykaiąca w ſobie 200 równych części wziętych z iakieykolwiek podziałki. Jeżeli druga liniia na tymże ſtoliku poprowadzona od końca pierwſzey wyrażaiącey podſtawę, ma w ſobie podług tey ſamey podziałki: naprzykład 180 części, to będzie dowodem, że i liniia odpowiadaiąca iey na ziemi, zawiera 180 ſążni.

298.

298. Używanie ſtolika nie rozciąga ſię, tylko do długości pomiernych. Naywiękſza taka długość, do którey ieſzcze ſtolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a naywięcey 400. ſążni Szczupłość narzędzia tego, a zatym i linii przez które muſiemy na nim wyrażać linije uważane na ziemi, czyni uchybienia tym znaczniéyſze, im większe ſą te oſtatnie długości. Możemy iednak używać ſtolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu iakiego nie bardzo rozległego i prawie foremnego; albo gdy tylko wewnętrzne mieyſca gruntu chociaż obſzernego, wyznaczyć potrzeba, którego położenie punktów znamienitſzych, iuż wyznaczone ieſt ſpoſobem dokładnieyſzym; który zaraz wyłożę.

299. *Spoſob 3. przez Kątomierz* (c).

Wyſtawienie przed oczy tego narzędzia, a potym używanie, da go naylepiey poznać. Tę tylko, co i względem ſtolika uwagę przydać należy, że kątomierze z ru-

---

(c) *Nauczyciele nie maiąc Kątomierza, ukażą Uczniom przenośnik, który małością tylko rozni ſię od Kątomierza, i tym, że nie ma przydanych ſobie prawideł z Celownikami.*

z ruchomemi prawidłami, na płaszczyznie pionowey ustawione, i perspektywami opatrzone, lepsze są od tych, które maią prawidła nie ruchome, zwłaszcza że wiele na tym zawisło, aby kątomierz był zawsze po ziemnie ustawiony; a długie i trudne iest działanie, chcieć przywieść do iedney płasczyzny na rożnych płaszczyznach uważane.

Kątomierz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniiami na stoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywa małe, tak dla większey wygody, iak i tanności, przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziałów mnieyszych od stopnia; przydaią mu zwyczaynie na to mieysce podział inny, któryśmy wyżey nazwali *podziałem Nonniusza*; aby tym sposobem i minut dochodzić można; przynaymniey do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędzia; co dosyć iest w zwyczaynych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak naybardziey przystawać do brzegu Kątomierza (i zawieraiący w sobie naprzykład 11. stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy

podział

podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, mniey $\frac{1}{12}$, stopnia, to iest mniey 5, minutami; a zatym, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sobą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony $^{o}$, w podziale prawidła, to iest punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis) prawidła, albo perspektywy schodzi się z podziałem brzegu Kątomierza, liczba stopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznacza w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nieschodzi się z podziałem brzegu, kąt którego szukamy, różnić się będzie 5. 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swoiey, od liezby stopniów wyrażoney przy podziale nayblizszym, podług tego iaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedostępnego.

Trzeba nayprzod, aby była wymierzona podstawa, położywszy potym Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nie ruchome przypadło na tęż podstawę, celuię drugim prawidłem rucho-

ruchomym, do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę daley na papierze, iakąkolwiek liniią, którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niey dwa kąty z obustron, równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten, w którym dwa tych kątów ramiona, przecinać się będą, pokaże na papierze położenie punktu, którego szukam, i iego odległość od iednego z końców linii wyrażaiącey podstawę tak się mieć będzie do teyże linii, iak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od konca podstawy tamtemu odpowiadaiącego, do samey podstawy. Pierwszy stosunek z podziałki wyznaczony będzie; a zatym wynaydzie się odległość żądana przez proporcyą; którey trzy pierwsze wyrazy będą wiadome; to iest: iak się ma liniia wyrażaiąca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma liniia na papierze odpowiadaiąca odległości, którey szukamy, do teyże odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości niewiemy; możnaby każdego z nich wszczegulności

wyzna-

wyznaczyć położenie względem linii wymierzoney, i wziętey za podſtawę; tak ſię albowiem mieć będzie liniia na papierze wyrażaiąca podſtawę, do linii wyrażaiącey także na papierze położenia punktów dwóch nie doſtępnych; (który to ſtoſunek wiadomy ieſt z podziałki) iak ſię ma podſtawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwòch punktów niedoſtępnych.

Jakażkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi, których położenie wyznaczyć chcielibyśmy, nie mierząc wſzyſtkich tych odległości, którem ſą te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżey ſpoſobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z oſobna punktu względem podſtawy, z którey dwóch końców wſzyſtkie te punkta widziane być mogą; i według tego wyznaczyć potym na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadaiące tamtym punktom.

Można więc będzie tym ſpoſobem odryſować mappę i obſzernieyſzey ſztuki ziemi, którey punkta do tego potrzebne widzialne ſą z dwóch iakich innych punktów.

Gdyby zaś nie wſzyſtkie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były

nie

nie dostępne, można w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe *punkta stanowniska* (puncta stationis) to iest takie, z których położenie innych punktów, mogłoby być wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z iednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego niebyły widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie iuż wyznaczone iest przez rysunek. Można podobnym sposobem działanie to rozciągnąć, i do odrysowania mieysc obszernieyszych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i iasne, atoli w wykonaniu ich, wielkiey baczności przykładać należy; bo inaczey, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, są znacznieysze, i działania w nich bardziey zawisłe iedne od drugich. Nie będziemy się tu bawić nad podawaniem drobnieyszych w tey mierze uwag, i służących tym tylko uczniom szczegulniey, których powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań, Znaydą ci bardzo dobre do tego się ściągaiące nauki, w różnych Ksiąźkach, między innemi w trzeciey

Księ-

Kfiedze pod tytułem *Institutiones Mathematicæ*, przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777, wydaney.

300. Tego fię fzczegulniey w podobnych rozmiarach ftrzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach ftanowifka nie były bardzo oftre, iako i te, które fobie wyftawić w myśli można przy punktach, których położenia fzukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącemi od punktów dwóch ftacyi, do tamtych punktów. Dlatego podftawa powinna być tym większa, im większa odległość, którey fzukamy, i położenie punktów takie, aby proftopadle od nich fpuszczone, ile możności przypadały na podftawę nie przedłużoną, albo przynaymniey mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie, przy podftawie, pociąga za fobą tym większe uchybienie w bokach, im większe fą nie tylko te fame boki, ale i ich kwadraty; a zatym, gdy kąty przy podftawie fą bardzo oftre, albo też, gdy ich fumma nie wiele fię różni od fummy dwóch kątów proftych, w takim razie trzeba odmienić iedno, lub obadwa ftanowifka. A ieżeliby między punktami, których położenie i odległość iuż ieft wyznaczona, nie znaydowały fię dwa inne takie, aby liniia łącząca ie zdatna

 była

była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami wyżey wspomionemi; choćby nam z siebie niebył potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczegulniey założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawisły od drugich, należy przynaymniey być zapewnionym, że w ten związek działań nie wplątały się błędy, z których rozmnożenia urosłoby znacznieysze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samey wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie rożni od tey która wyznaczona była przez proporcyą, której dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też: wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podstawę i szukać z niey położenia końca iednego z dwóch, pierwszey podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta, była nam ieszcze niewiadoma; a gdy się pokaże, że z tego powtornego działania wypadnie to samo położenie punktu, co z pier-

pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowod dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynaymniey znaczniey szego; ponieważ z dwoiakiego takiego działania, iednakowe położenie wypaśćby inaczey nie mogło; chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziey nadgrodził drugi, co się rzadko trafia.

Jakażkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszenie atoli na papier tych działań, będzie podlegać wielkim nie pewnościom.

Trudność ta ostatnia ztąd szczegulniey wynika, że pewną liczbe stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cerklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwoch narzędziach, ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobna wyznaczyć liczbę minut, które pospolicie w kącie danym znaydują się. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inny większy w liniiach, których długość różnić się ztąd będzie od prawdziwey, 30stą, 20stą, aczasem i 10tą częścią tychże samych linii; a ten

błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach linii sprawi, im mnieysza względem nich była ta liniia, którą wzieliśmy za promień. Zrzodło to omyłek mniey wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy iuż nam zkąd inąd wiadome są długości boków należących do Figur, ktore rysować mamy; a te długości są pospolicie zamiarem szczegulnieyszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całey linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość, omyłka ta, ktora ztąd wyniknie, względem położenia na papierze linii figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieysza, im dłuższe były liniie, ktoreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Troykątach, ktorych boki byłyby nam wiadome; to iest żeby można odrysowac na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, ktoreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Troykąta, szukano sposobow, i znaleziono ie, iakby ztąd doyść ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziemomierſtwa, która na to przepiſy daie, nazywa ſię Trygonometryą, albo *Troykątmierſtwem*; ato dla tego, że ſzczegulniey rzecz tam ieſt o Troykątach, iako tych, od ktòrych wyrachowania wſzyſtkich innych wielokątów wyrachowanie zawiſło. Jeſt to część nayżnakomitſza Matematyki, nazwaney (Matheſis pura) przyſtoſować ią bardzo częſto można do Matematyki, którą nazywać można *Mieſzaną*, idąc za łacińſkim nyzwiſkiem (Matheſis mixta:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli ſilniach; do Optyki, albo nauki o widzeniu, a naywięcey do Aſtronomii, czyli nauki Gwiazdarſkiey; i dla tego ta część ſzczegulnieyſzey uwagi i zaſtanowienia ſię uczniów wyciąga.

## *Przygotowanie do Rozdziału naſtępuiącego o Logarytmach.*

POnieważ o Logarytmach dokładniey mòwić ſię potym będzie, tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby ie przyſtoſować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnienia pierwiaſtku kwadratowego.

301. Logarytmy, ſą to liczby odpowiadaiące liczbom całkowitym, i naſtępnym,

1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w ten ſpoſob; że te pierwſze liczby, czyli Logarytmy, iedne do drugich dodane, odpowiadaią tym oſtatnim, gdy ſą iedne przez drugie rozmnożone.

Y tak znayduiemy w tablicach logarytmowych przy liczbach - - - - 2, i 3.

Logartmy: 0, 3010300
0, 4771213

Jch ſumma 0, 7781513, ieſt logarytmem liczby 6, która ſię robi z rozmnożenia 2, przez 3.

Wzwyczaynych tablicach logarytmowych, logarytmy liczb:

| | | |
|---|---|---|
| 10, | - - | 1 |
| | ſą | |
| 100; | - - | 2 |
| 1000 | - - | 3 |
| 10000 | - - | 4. |
| i t. d. | | i t. d. |

Logarytmy liczb mnieyſzych od 10, ale większych od 1, ſą ułomki dzieſiątne niemaiące żadney liczby całkowitey.

Y tak

Y tak Logarytmy liczb:

| | | |
|---|---|---|
| 2, | - | 0, 3010300. |
| | są | |
| 3, | | 0, 4771213. |
| 4, | - | 0, 6020600. |
| 5, | - | 0, 6989700. |
| i t. d. | | i t. d. |

302 Ponieważ zaś rozmnożenie iakiey liczby przez 1, żadney odmiany w niey nie ſprawia; przeto i dodanie logarytmu iedności, do logarytmu tey liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logartytm więc iedności ieſt zero albo o.

Logarytmy liczb między 10, i 100, ſą: iedność z przydanemi ułomkami dzieſiątnemi.

Legarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, it. d. ſą liczby całkowite pierwſzych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanemi ułomkami dzieſiątnemi.

Znak pierwſzy logarytmu liczby całkowitey, ieſt częścią nayznakomitſzą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z iak wielu znaków ſkłada ſię liczba całkowita, którey ieſt logarytmem. Tak naprzykład, znak logarytmu pierwſzy: o, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba,

któ-

ktorey odpowiada, zawiera się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo midęy 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000. i t, d. to iest ma w sobie ieden, dwa, trzy, cztery, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też pierwszy znak Logarytmu nazywa się iego *Cechą* (Characteristica).

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowe ułomki dziesiątne, (d) a cecha ich tylko iest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadaiące, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe iedna od drugiey, podług tego, iak cecha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiey, dwiema, trzema i t. d, iednościami, Y tak logyrytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 3010300. 2, 3010300. 3, 3010300 i t. d. to iest, będzie ten sam, co i Logarytm liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Ttrzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od naywiększey liczby tablic logarytmowych.

304.

---

(d) *Te ułomki w logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie:* Mantissa.

304 *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log: liczby | 28 | - | 1,4471580. |
| | | iest | |
| Log. | 32 | - | 1,5051500. |
| Summa Log. | - | - | 2,9523080. |

Y ta Summa powinna być logarytmem liczby rozmnożoney z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 29523080, znaydziemy liczbę 896; która to liczba wypada wſamey rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

*Przykład* 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log: | 16, | - | 1.2041200, |
| Log: | 24. | - | 1 3802112. |
| Log- | 26. | - | 1.4149733. |
| Summa Log: | | - | 3.9993045. |

Y to ieſt logarytm liczby 9984, która wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiey liczby, ieſt ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona; więc logarytm tego kwadratu, będzie rów-

równy logarytmowi liczby z którey kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

*Przykład* 1. Log: 2, - 0.3010300.

Tenże dwa razy wzięty 0,6020600, będzie logarytmem kwadratu z 2, to iest 4.

*Przykład.* 2, Log. 56 - 1.7481880.
Dwa razy wzięty: - - 3.4963760.
będzie Logarytmem kwadratu z 56, - - to iest 3136.

306. W dzieleniu; liczba podzielna równa się liczbie dzielącey, przez wieloraz rozmnożoney; a zatym logarytm liczby podzieloney, równa się logarytmowi liczby dzielącey dodanemu do logarytmu wielorazu; a ztąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielney i dzielącey.

*Przykład.* 1. Podzielić 6, przez 2,

| | | |
|---|---|---|
| Log: 6. | - | 0.7781513. |
| Log: 2. | - | 0.3010300. |

Rożnica - - 0.4771213. iest logarytmem wielorazu, to iest 3.

*Przykład-*

*Przykład.* 2. Podzielić 1632 przez 34.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log: | 1632 | - - | 3.2127202 |
| Log: | 34 | - - | 1.5314789 |

Rożnica - - 1.6812413. ieſt logarytmem wielorazu, to ieſt. 48.

307. W proporcyi: średnie liczby, iedna przez drugą rozmnożone, rowne ſą ſkraynym podobnie rozmnożonym, iako to w Arytmetyce i w Rozdziale o proporcyach wywiodło ſię. Przeto iednę z ſkraynych liczbę znayduiemy, dzieląc średnie liczby w ten iak wyżey ſpoſob rozmnożone, przez drugą liczbę ſkrayną: a zatym i logarytm liczby iedney ſkrayney wynaydziemy, odiąwſzy od ſummy logarytmow dwoch liczb średnich, logarytm drugiey liczby ſkrayney.

*Przykład.* 1. 35 Robotnikow, zrobiło 45, ſążni pewney roboty, ileż w tym ſamym czaſie zrobi 42, robotnikow zrowną uſilnością pracuiących?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log: | 42 | - | 1.6232493, |
| Log: | 45 | - | 1.6532125 |
| Summa | | - - | 3.2764618. |
| Log: | 35 | - | 1.5440680. |

Rożnica - 1.7323938. ieſt logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiast odeymowania, któreby należało czynić w logarytmach, używa się wygodnie dodawania w ten sposób: Logarytm liczby dzielącey, a bardziey iego cecha, odeymuie się od liczby całkowitey 10, i reszta dodaie się do logarytmu liczby podzielney, a od summy, znowu się 10 odcina.

*Defin.* Różnica logarytmu liczby iakiey od 10, nazywa się *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

*Przykład.* Podzielić 6. przez 2.

Log: 6. - - 0.7781513.
Log: 2, 0.3010300 dopełnienie tego log: - 9.6989700

Summa - - 10,4771213.
Log: wielorazu - 0. 4771213.
iest Log. 3,

Podzielić 1632 przez 34.
Log. 1632 3.2127202.

Log: 34, 1.5314789. Dopełn:
Log: 34 8.4685211.

Summa- . 11.6812413.
Log: wielora: 1.6812413.
iest Log: 48.

Ten

Ten ſpoſob poſtępowania oſobliwiey ieſt wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanie naſtępuiące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaſzcza rachunkach, omyłki iakiey dać okazyą. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanie, które potrzebne ieſt do otrzymania dopełnienia logarytmu, które ſię potym dodaie na mieyſce logarytmu odeymować ſię maiącego,

*Przykład.* 35 Robotników, zrobiło 45 ſążni, ileż zrobi 42 robo?

| | | |
|---|---|---|
| Log: | 42 | 1.6232493. |
| Log: | 45 | 1.6532125. |
| Dopełnienie Logaryt. | 35 | 8.4559320. |
| Summa którey cecha zmnieyſzona liczbą | 10. | 1.732,3938. |

*Przykł.* 2. Bok ieden proſtokąta ma 1344, a drugi 1445, łokci. Trzeba go zamienić na inny proſtokąt iemu równy, którego bok ieden ma zawierać 1440. łokci?

Log;

Log: 1344 - 3.1283903
Log: 1445 - 3.1628630

Summa - 6.2912623.

Log: 1440 - 3.1583625.

Rożnica - 3.1328998. ieſt

Logarytmem liczby, ktorey ſzukaliśmy to ieſt 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy ieſt większy, niż logarytm pierwiaſtku; przeto logarytm pierwiaſtku; ieſt połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby pierwiaſtek kwadratowy, trzeba wziąść połowę logarytmu tey liczby.

*Przykład*, 1. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 4.

Log: 4. - 0.6020600.
Połowa - 0.3010300. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 2.

*Przykł.* 2. Wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z 7569.
Log. 7569. - 3.8790385.
Połowa - 1.9395192. ieſt logarytmem pierwiaſtku, to ieſt 87.

*Przykł.* 3. Boki proſtokąta ſą: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2.5774918.
Log: 672 - 2.8273693.

Summa - 5.4048611.

Połowa - 2.7024305. ieſt logarytmem liczby ſzukaney to ieſt 504.

310, *Co ſię tycze logarytmów ułomków dzieſiątnych.*

Niech będzie liczba nap: 1764, ktòrey logarytm: 3.2464986. Podzieliwſzy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniey w ceſze ſwoiey (303.) Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 2464986.
Podobnie log: 17, 64, będzie 1. 2464986.
Log: 1, 764 - 0, 2464986.

Dzieląc 1764, przez 1000, logarytm wielorazu, to ieſt liczba 1,764, ma cechę mnieyſzą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Gdyby tedy przyſzło, 1764 dzielić przez 10000, 100000. 1000000, i t. d. Logarytmy wielorazów, to ieſt ułomków dzieſią-

tnych:

tnych: o, 1764. o, o1764, o, oo1764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d: iednościami mnieyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzieloney. Że zaś Cecha logarytmu liczby 1764, iest: 3, a Cechy logarytmów liczb: 10000, 100000, 1000000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. to iest liczby większe od 3, od których ie odeymować przypada. więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa się, iakoby cecha 3, powiększona była 10 iednościami, i dopiero od tak powiększoney odeymuią się cechy liczb dzielących: 10000, 100000, 1000000. i t. d. to iest cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze nato przydanie, i zmnieyszaiąc znowu resztę, to iest logarytm wielorazu tąż liczbą: 10; Będzie więc log $\frac{1764}{10000}$, albo 0,1764 $=$ 13, 2464986 — 4 (e) $=$ 9, 2464986, to iest dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w samey rzeczy $=$ 9,2464986 — 10. Tak też Log: 0,01764, będzie $=$ 8, 2464986 — 10. Log. 0. 001764 będzie $=$ 7, 2464986 — 10. i t. d.

Przy-

(e) *Znak — kładzie się przed tą ilością nap. przed tą liczbą, która ma być od drugiey odiętą.*

*Przykład* 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Summmma = 1,0791812. = Log: 12, to ieſt liczby wypadaiącey z rozmnożenia 24 przez 0,5.

*Przykład* 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

Log: 24 = 1,3802112.

Log: 0,05 = 8,6989700. — 10.

Summa = 0,0791812. ieſt logarytmem liczby roznożoney.

Ten logarytm nie znayduie ſię w tablicach logarytmowych z cechą, 0, ale ſię znayduie z cechą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatym liczba, którey ſzukaliśmy, będzie 10 razy ,mnieyſza to ieſt: 1, 2.

*Przykład* 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,5051500.
Log: 0,5 = 9,6989700. — 10.

Reſzta. 1,8061800 ieſt logarytmem wielorazu, to ieſt liczby 64.

 Odey-

Odeymuiąc 9,6989700, od 1,5051500, odeymowalibyśmy 10 razy więcey, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydać należało. Na iedno zaś wyidzie, gdy te 10, któremi iest powiększona liczba maiąca się odeymować, przydamy też i do liczby, od którey ią odeymować przypada; to iest gdy odeymuiemy 9,6989700 od 11,5051500.

*Przykł.* 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,1583625.

Log: 0,06, = 8,7781513 — 10.

Rożnica - - 3,3802112. iest logarytmem wielorazu, to iest liczby: 2400.

*Co do ułomków zwyczaynych.*

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatym logarytm ułomka równy różnicy między logarytmem licznika iego i mianownika.

Niech będzie naprzykład ułomek nie właściwy $\frac{7}{7}$.

Log:

Log: 7. - 0,8450980.

Log: 5 - 0,6989700.

Rożnica - 0,1461280 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można ſię o tym przekonać używſzy ułomką dzieſiątnego zamiaſt ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiem $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.1461280.

Azatym Log. 1,4 - 0.1461280.

312. gdyby ułomek był właściwy, to ieſt gdyby licznik iego był mnieyſzy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyſzy od logarytmu mianownika; Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, pożyczamy 10. temu logarytmowi iak wyżey (310) w podobnym przypadku.

*Przykład* 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: 2 = 0,3010300.

Log: 5 = 0,6989700.

Log: $\frac{2}{5}$ = 9,6020600. — 10.

*Przykład* 2. Trzeba znaleść Log: $\frac{7}{15}$.

Log: 7 = 0,8450980.

Log: 15. = 1,1760913.

Log. $\frac{7}{15}$ = 9,6690067. — 10.

*Przykł:* Trzeba znaleść log: $\frac{1}{25}$.

Log: 1. = 0,0000000.

Log: 25 = 1,3979400.

Log; $\frac{1}{25}$ = 8,6020600. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennego iakiego znaku cechy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącego ułomkowi; aby ią zaraz na weyrzenie rozeznać można od cechy logarytmu, który liczbie całkowitey odpowiada.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znayduie się w Tablicach, można wtedy liczbę, którey odpowiada wyznaczyć, albo z zupełną dokładnością, albo z małym uchybieniem.

*Przykł:* 1. Jakiż iest wieloraz 5, przez 4 podzielonych ?

| | | |
|---|---|---|
| Log: 5 | - - | 0.6989700. |
| Log: 4 | - - | 0.6020600. |
| Rożnica | - - | 0.0969100. |

Logarytm ostatni oznaczaiący różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znayduie się w Tablicach ani z cechą 0, ani z cechą 1; ale się znayduie z cechą 2; liczba onemu odpowiadaiąca iest: 125; ale że ten logarytm ma cechę 2, więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mnieyszey, to iest: 1,25.

*Przykł.* 2. Trzeba znaleść kwadrat z 299, maiąc tylko Tablice Log. nie daley rozciągaiące się, iak do 10000, to iest takie, ktòrych naywiększy Log. iest: 4000000o.

| | | |
|---|---|---|
| Log: 299 | - - | 2.4756712. |
| Tenże podwoiony | - | 4.9513424. |

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwyczaynych nie znayduiemy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: Ten Logarytm zmnieyszony 3.9513424, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znayduie się w tablicach, znayduiemy go iednak co do pierwszych; i mało co większy iest od Log: 3.9513375. a mnieyszy od 3.9513861

Pierwszy z tych logarytmów znayduiących się zupełnie w Tablicach, iest Log: liczby 8940, a drugi Log. liczby - - - 8941.

A zatym liczba, ktòrey szukamy, będzie między 89400 - - - - - i - 89410.

Logarytm dany przewyżſza logarytm pierwſzy Tablicowy liczbą 49; mnieyſzy zaś ieſt od drugiego logarytmu Tablicowego liczbą 437. Ta tedy którey ſzukamy liczba, powinna daleko więcey zbliżać ſię do 89400, niż do 89410.

Widziemy z Tablic, że kilka logarytmów, które naſtępuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę ſamę, co i te logarytmy rożnicę, to ieſt 486; tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących ieſt taż ſama, to ieſt 1; a zatym ieżeli rożnica między logarytmem danym i logarytmem Tablic iemu naybliżſzym, ieſt naprzykład połową, lub trzecią częścią, lub czwartą, i t. d. rożnicy między tymże naybliżſzym logarytmem, i drugim, zaraz po nim, naſtępuiącym, to też i rożnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danemu, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi naybliżſzemu, będzie prawie połową trzecią częścią, czwartą i t. d. iedności, która ieſt różnicą między dwiema liczbami naturalnemi, po ſobie idącemi. Ze tedy rożnica 49, ieſt prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486, więc i różnica liczby ſzukaney dla dodatku liczbie 8940, będzie dzieſiątą częścią iedności, to ieſt 0, 1; a zatym liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3.9513424 będzie prawie 8940, 1, liczba zaś

zaś odpowiadaiąca Log: 4.9513424, będzie, 89401, to iest kwadrat, którego szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczegulnym zakończenie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iey ma się kończyć na 1, można było bez tak długiego rozumowania doyść teyże liczby kwadratowey: 89401.

314. Czemu różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieysza, im są większe liczby, którym one odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Rożnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9, iest: 457575.

Rożnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, iest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;) ale ta rozkłada się na dziesięć innych mnieyszych rożnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, iest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłada się na 100 mnieyszych daleko rożnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901. i 902, 902 i 903 - 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000 i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10, ale się rozkłada na 1000. innych rożnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanie logarytmów iest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z Jlości nie społmiernych.

*Przykład 1.* Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.3010300.

Połowa tego Log - - 0.1505150.

Szukaymy tey połowy z cechą 3. Logarytm naybliższy w tablicach będzie: 3.1504494, który odpowiada liczbie: 1414. Aże ten logarytm iest mnieyszy od 3,1505150, więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danemu będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994476; i 2,002305.

Aby pierwiastek bardziey ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656. między logarytmem danym, i naybliższym z tablic; i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logaryt-

garytmami, danemu naybliższemi. Ułomek $\frac{656}{3070}$ na dziesiątne części obrocony, będzie miał pierwsze dwa znaki liczebne: 21; azatym pierwiastek bardziey przybliżony będzie: 1,41421. Możnaby i więcey, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydać w tym pierwiastku, kończąc daley dzielenie, a tym więcey pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

*Przykł.* 2. Trzeba znaleść liczbę przybliżoną do następuiącego wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Log. 5. - 0.6989700; $\frac{1}{2}$ Log: 5 - 0.3494850.

Log: 2. - 0.3010300; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.1505150

Rożnica - - 0.1989700

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą przydaną: 3, liczbie; 1581, a zatym $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

RO-

# ROZDZIAŁ XII.

## O Trygonometryi.

316. WYstawmy sobie Troykąt w koło wpisany. Boki tego Troykąta byłyby cienciwami łuków przeciwnych iego kątom. Aże miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tegoTroykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważnosé w stopniach ta sama iest, co i kątów im przeciwnych.

Jdzie zatym, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładney, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy naprzykład od łuku iedney minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cienciwa iest naywiększa) iuż tym samym i stosunek boków Troykąta znalezlibyśmy z danych kątòw iego; i wzaiemnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Troykąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwoynasob kątów Troykąta, szukam zamiast cienciw innych linii, do których boki Troykąta byłyby proporcyonalne, i takich; któreby się właściwie ściągały do kątów tegoż Troykąta. Kąt w środku koła

koła opiſanego na Troykącie, zamykaiący ramionami ſwemi ten łuk, którego cienciwą ieſt bok ieden tegoż Troykąta, kąt mówię taki, dwa razy ieſt większy od tego, który przy okrągu koła naprzeciw, ſtoi tegoż boku Troykąta; a zatym gdybyśmy ten kąt w środku, przecieli liniią na dwie równe części, iedna takowa część byłaby równa tamtemu kątowi Troykąta. Bok tenże Troykąta byłby proſtopadły do linii przecinaiącey kąt na dwie równe części; a ta liniia przecięłaby go na dwie także równe części; Toż ſamo przyſtoſować można i do innych dwoch boków tego Troykąta. W ten ſpoſob wyſtawiono ſobie boki Troykąta, względem kątów im przeciwnych,

318. *Defin.* Wziąwſzy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednego końca tego łuku, ſpuściemy proſtopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku, ta proſtopadła ma nazwiſko *Sinus* (f) a po Polſku nazwać ią można *Wſtawą* tego

(f) *Wyraz ten* Sinus *ztąd podobno ma ſwoy początek: Połacinie* Cienciwa *nazywa ſię* Jnſcripta; *a połowa cienciwy,* ſemiſſis Jnſcriptæ; *dla ſkrócenia, piſano może dawniey* S. Jns. *Przepiſuiący iakie*

tego łuku, że się wstawia między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniem przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

*Tab. XVIII. Fig.* 1. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od konca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równa się połowie cienciwy łuku innego, dwa razy większego, iak naprzykład Wstawa BD, łuku BA, równa się połowie cienciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90,°, a ponieważ wstawa stopniow 90, równa się promieniowi, i iest naywiększą, nazywa się dla tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwartey części okrągu koła, zmniey-

*dzieło Matematyczne, nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skroconego, opuścił punkt oddzielaiący te dwa wyrazy, i dawszy słowu* Sins *zakończenie łacińskie, napisał* Sinus, *i ztąd potym wzięte podobno było to nazwisko.*

zmnieyſzaią ſię coraz bardziey zacząwſzy od 90° aż do 180°; tak dalece że Wſtawa ſtopniów 180° równa ſię 0. Wſtawa zaś każdego łuku więkſzego od 90°, a mnieyſzego od 180° ieſt ta ſama, która i łuku mnieyſzego od 90°, a Spełniaiącego łuk pierwſzy do 180°. Y tak naprzykład Wſtawa łuku 100°, taż ſama ieſt co i łuku 80° wſtawa łuku 120° ta ſama, co i łuku 60° i t. d. Takowe *Spełnienie* łuku do 180° albo do pół okręgu koła, nazywa ſię po łacinie *Supplementum arcûs.*

Co ſię tycze łuków więkſzych od połokręgu koła, o tym niema potrzeby mowić w tych początkach.

322. *Wnioſek* 4. Ponieważ promień naprzykład CF, ieſt Wſtawą naywiększą ze wſzyſtkich, czyli Wſtawą ſtopniów 90°, Wſtawa zaś od łuku AFb, więkſzego od czwartey części tego okręgu, ieſt ta ſama, co i łuku ab, mnieyſzego od czwartey części tegoż okręgu; (który to łuk oſtatni Spełnia pierwſzy do połokręga) idzie zatym, że do ułożenia Tablicy na wſtawy łuków doſyć wyznaczyć wſtawy tych łuków, które ſą mnieyſze od 90°.

323. *Wnioſek* 5, Wſtawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak ſię

maią

maią do siebie, iak tychże koł promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez regułę trzech i wystawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek* 6. Ponieważ kąt w środku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadła, spuszczona od punktu iakiego w iednym z ramion iego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta, Cokolwiek zatym powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystosować można i do wstaw kątów: Y tak, Wstawy kątów rosną od $o$, aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi; zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180° (która iest $= o$;) i wstawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta Ostrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięte za promienie.

A ieżeli

A ieżeli dwie linie są wstawami dwoch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wstawy całey, te linie tak się do siebie mieć będą, iak Wstawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdz.* I. W każdym Troykącie boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Niech będzie Troykąt ABC; bok iego naprzykład AC, tak się ma do boku BC = iak wstawa kąta B, do wstawy kąta A. *Fig.* 2

*Dowodz: z wykreśleniem.* Na danym Troykącie opiszmy koło, i poprowadzmy średnicę CD, i cięciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC są równe, bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swemi iednakowy łuk BC. Dla teyże przyczyny równe są także i kąty: ADC, ABC. Oprocz tego, kąty: CBD, CAD są proste, bo są w połkole; więc Linie CB, CA, będą wstawami kątów: CDB, CDA względem teyże samey wstawy całey, czyli promienia CD; a zatym tak się mieć będą do siebie te linie, iak wstawy kątów A i B.

*Można ieszcze i następuiącym sposobem, tego samego dowieść.*

Opi-

Opiſawſzy koło na danym Troykącie; połowy boków iego, będą wſtamami połowy kątów w środku im przeciwnych, a zatym będą też i wſtawami kątów Troykąta przeciwnych tymże bokom; (biorąc za Wſtawę całą, promień tego koła.) Są tedy do ſiebie połowy tych boków, iak wſtawy kątów im przeciwnych, aże połowy tak ſię maią do ſiebie, iak ich całości; więc też i całe boki Troykąta, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak wſtawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wnioſek.* Za pomocą Tablicy na Wſtawy ułożoney, podług promienia iakiegokolwiek, można doyść ſtoſunku boków Troykąta, którego kąty ſą nam iuż wiadome; azatym, gdy ieſzcze i bok ieden tegoż Troykąta ieſt wiadomy, będzie można znaleść i dwa inne iego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Tablicę Wſtaw, podług promienia podzielonego nap: na 100000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłaſzcza w tablicach do zwyczaynieyſzego używania ułożonych, znayduie ſię. Żeby zaś rachunek krótſzym i łatwieyſzym uczynić, przydano i tablicę logarytmów, Wſtaw tychże. W takowych iednak tablicach, gdzie i logarytmy wſtaw znayduią ſię, uważa-

uważano promień, albo wſtawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatym, iak gdyby logarytm iey, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznacza, iż wſtawa zawiera w ſobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcey; tak, iak cecha logarytmu wſtawy całey, to ieſt liczba: 10, oznacza, iż wſtawa cała zamyka w ſobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie wykłada ſię teraz iak ułożone ſą te tablice; podany tylko będzie ſpoſob ich używania. W tablicach tych znayduiemy na dwóch kartach iedney obok drugiey, w dwóch różnych ſłupach czyli kolumnach, Wſtawy dwóch kątów których ſumma czyni kąt proſty, albo 90°. Tablica tych wſtaw po lewey ręce kart, rozciąga ſię od 0°, aż do 45.°. Tablica zaś po prawey ręce idzie wſpak od 90°, aż do 45. Te kąty których ſtopnie wyrażone ſą po prawey ręce, nazywaią ſię *dopełnieniem* tamtych (complementum) do 90°; a ich wſtawy *wſtawami dopełnienia* (ſinus complementi) czyli krócey, *Doſtawami* (Coſinus.)

328. Summa kwadratów, z Wſtawy, i z doſtawy łuku, albo kąta, równa ſię kwadratowi promienia, czyli wſtawy całey.

*Fig.* 1. Bo ponieważ dwa łuki; nap. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) ſą dopełnieniem ieden drugiego; Wſtawa BG; łuku FB, równa ieſt linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratem wſtawy BD, równa ſię kwadratowi promienia BC, więc i ſumma kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329. *Przyſtoſowanie.* Maiąc na polu wymierzoną podſtawę, i kąty które czyni podſtawa z dwiema liniiami wykierowanemi ku iednemu celowi, znaleść tych oſtatnich dwóch linii długość?

*Fig* 3. Niechby Troykąt ABC, wyrażał Troykąt na polu, zawarty między podſtawą wymierzoną i dwiema liniiami dążącemi ku iednemu celowi.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A + B = 122°
a zatym 180° (A + B) = 58° = C.
Wſtawa kąta C : Wſtawy kąta A = AB : BC
wſta: C : wſta: B = AB : AC

Log.

Log: AB = 3,0791812.

Log wſt: A = 9,8842540.

---

Summa = 12,9634352.

Log: wſt. C = 9,9284205

Rożnica = Log. BC = 3,0350147.

Azatym bok BC = prawie 1084.

Z pierwſzey tedy proporcyi znaydziemy bok BC, dodaiąc do ſiebie logarytmy wſtawy A, i boku AB, a odiąwſzy od ich ſummy, logarytm wſtawy C; Rożnica albowiem dwòch logarytmów oſtatnich, pokazuie logarytm boku BC. który bok w tablicy oſobney logarytmów liczb, znaydziemy przytymże logarytmie = 1083, 96. to ieſt prawie = 1084.

Podobnym ſpoſobem znaydziemy z drugiey proporcyi, i drugi bok AC = 1345, 76.

Dla ſkrocenia rachunku, można z początku zaraz odiąć logarytm wſtawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dodawſzy do cechy tego drugiego

logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś, dodaiąc osobno logarytmy wstaw kątow A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącey bok AB, dochodziemy dwóch boków innnych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodawania, zamiast odeymowania, kładąc dopełnienia logarytmów. (g) na mieysce tych, które przez nich są dopełnione.

Y tak w pierwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest pierwszym wyrazem proporcyi, z którey szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów średnich, a drugim wstawa kąta A, lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodamy dopełnienie logarytmu wstawy kąta C, ta summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promienia.

*Przy-*

---

(g) *Dopełnieniem logarytmu nazywa się ta liczba, która z nim razem czyni logarytm promienia, iak naprzykład,* 0,0715795 *z logarytmem wstawy C,* 99284205 = 10,00000000.

*Przykł.* Dopełnienie logarytmu wstawy - - C $=$ 0,0715795.
Log: AB $=$ 3,0791812.
Log: wst: A $=$ 9,8842540.

Summa zmieyszona liczbą 10. - - $=$ 3,0350147 $=$ Log. BC.

Więcey ieszcze podobnych przykładów uczniom podać należy.

330 *Przyst.* 2. Maiąc dane kąty, i bok ieden Troykąta, znaleść powierzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie ten sam co wyżey Troykąt, którego wiadome nam są katy, i podstawa AB; szukaymy powierzchni tego Troykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C : Wst. A $=$ AB : BC.

Promień: Wst. B $=$ BC : CD.

Więc Pr: $\times$ Wst. C: wst: A $\times$ wst. B
- - $=$ AB : CD.
$=$ $AB^2$ : AB $\times$ CD
$=$ $AB^2$ :2.Powierzchni

A zatym, 2 Pr. $\times$ wst. C : wst. A $\times$ - - wst. B $=$ $AB^2$ : Powierzchni

Log.

Log. AB = 3.0791812.

Logarytm ten dwa razy wzięty =
Log. $AB^2$ = 6,1583624.
Log. Wſt. A = - 9.8842540.
Log. Wſt. B = - 9.9782063.

Summa = 26,0208227.

Log. 2 = 0.3010300.
Log. Wſt. C = 9,9284205.
Log. Pr. = 10.0000000.
Summa 20.2294505.

Rożnica tych dwóch ſumm: 5,7913722, ieſt logarytmem liczby, która oznaczy powierzchnią a ta będzie = 618546. bliſko.

Proporcya ta, z które y doſzliśmy powierzchni Troykąta, tak ſię wyraża: Proſtokąt z Wſtawy całey, czyli z promienia, i z wſtawy kąta przeciwnego iednemu bokowi, tak ſię ma do proſtokąta wſtaw dwoch kątów przy tym boku; iak ſię ma tenże ſam bok, do proſtopadłey nań ſpuſzczoney od wierzchołka kąta przeciwnego; albo też: proſtokąt z promienia, i z wſtawy kąta przy wierzchołku, tak ſię ma do proſtokąta z wſtaw dwóch kątów przy podſtawie, iak ſię ma podſtawa do wyſokości Troykąta.

331.

331. *Przyſt.* 2. Maiąc dane w liczbach dwa boki Troykąta, i kąt między niemi zawarty, znaleść powierzchnią tego Troykąta przez iednę proporcyą.

Niechby w Troykącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podſtawę AB, proſtopadłą CD; będzie Pr: - - -

Wſt. A = AC : CD.
= AC × AB: CD × AB.
= AC × AB: 2 powierzchni

A zatym Pr.

$$\text{Wſt. } A = \frac{AC \times AB : \text{powierzchni.}}{2}$$

To ieſt: tak ſię ma promień do wſtawy iednego z kątów Troykąta, iak połowa proſtokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Troykąta.

Niech będzie AB = 384.
AC = 405.
A = 50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB = Log. 192 = 2,2833012.
Log. AC = - - 2,6074550.
Log. Wſt. 50° = - - 9 8842540.

Summa zmnieyſzona liczbą 10, (to ieſt logarytmem promienia) = 4,7750102, a zatym powierzchnia której ſzukaliſmy = 59767.

Fig. 4. 332. *Przyſtos.* 4. Maiąc dany Troykąt proſtokątny, ktérego wiadoma ieſt przeciw proſtokątna i iedno ramie kąta proſtego, znaleść inne dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwſzy wtym Troykącie przeciwproſtokątną za promień, ramiona kąta proſtego, będą oraz wſtawami kątów im przeciwnych; a zatym gdyby dana przeciwproſtkątna była wyrażona przez 100000, i znaczyła promień na tyle części równych podzielony; ſzukaiąc w tablicach między wſtawami, lub doſtawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany; a liczba ſtopniów odpowiadaiąca tey wſtawie, pokazałaby ważność w ſtopniach, kąta przeciwnego bokowi danemu

Gdyby zaś przeciwproſtkątna, przez inną liczbę była wyrażona, a nie przez tę, ktéraby ſię równała wſtawie całey w tablicach znayduiącey ſię w takim razie użyćby trzeba naſtępuiącey proporcyi:

BC : AC = Pr. wſt. B.

Niech będzie BC = 1548.

AC = 1248.

Log.

Log. AC = 3,0962146.

Przydawſzy log. Pr. = 13,0962146.

Log. BC = 3,1897710.

Rożnica = 9,9064436. = Log. Wſt: B.

B = 53°, 44' —, to ieſt 53 ſtopniów, i coś mniey niż 44 minut.

C = 36°, 16', ✝ to ieſt 36 ſtopniów, i coś więcey niż 16 minut.

Pr: wſt: C = BC: AB.

Log. BC = 3,1897710.

Log. wſt. C = 9,7719872 ✝

Odiąwſzy Log. promienia będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,9617582 ✝ = Log. AB; a zatym AB = 915,7 ✝

Jeśli tylko ſamego boku AB, znalezienie ieſt potrzebne, można ſkrocić rachunek, biorąc ſummę logarytmów ſummy i różnicy przeciw proſtkątney, i boku danego; i dzieląc tę ſummę przez 2; które to działanie na tym ſię zaſadza, że kwadrat boku AB, równa ſię różnicy kwadratów

dratów przeciw proſtkątney BC, i boku drugiego AC, albo (co na iedno wychodzi) proſtokątowi z ſummy ich i z różnicy, to ieſt proſtokątowi z ſummy BC ✝ AC i z różnicy: BC — AC. Summa tedy logarytmów ſummy: BC ✝ AC, i różnicy BC — AC będzie logarytmem kwadratu, $AB^2$, a zatym połowa tey ſummy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiaſtku, to ieſt boku AB.

BC ✝ AC = 2796.

BC — AC = 300.

Log. (BC ✝ AC) = 3,4465372.

Log. (BC — AC) = 2,4771213.

Summa = - 5,9236585.

Połowa = - 2,9618292 = Log. AB.

A zatym bok AB = 915,8 ✝.

Porównywaiąc z ſobą tę ważność dwoiaką boku AB, ktora z dwóch odmiennych rachunków wypada, poſtrzegamy różnicę mnieyſzą niż $\frac{1}{9000}$ całey ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w pierwſzym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C w ſamych ſtopniach i minutach pierwſzych nie ſzukaiąc minut drugich.

333. *Przypadek*. 5. Maiąc dany w Troykącie roztwartokątnym, kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaleść drugie ramie i dwa inne kąty?

Niech będzie Troykąt ACB, którego dany ieſt kąt roztwarty CAB, bok CB iemu przeciwny, i ramie iedno AC; znaleść inne kąty: B, i C; i bok AB. *Fig. 5.*

*Spoſob 1. poſtępowania.* Z tey proporcyi; BC : AC = Wſt. A : wſt. B; doydziemy kąta B, a odiąwſzy od 180°, ſummę kątów A i B, reſzta pokaże kąt C.

Z drugiey proporcyi; wſt. A : wſt. C = BC : AB, wiadomy będzie bok AB.

*Spoſob 2.* Spuśćmy proſtopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Troykącie proſtokątnym ACD, którego bok AC i kąt A ieſt wiadomy, można doyść dwóch boków CD i AD, z dwóch naſtępuiących proporcyi.

Pr. wſt. A = AC : CD.
Pr. Doſtawy A = AC : AD.

Maiąc wiadomą w Troykęcie proſtokątnym BCD, przeciwproſtkątną BC, i iedno kąta proſtego ramie. CD, będzie można doyiść (332.) Boku BD, od którego odciąwſzy AD, znaydziemy bok AB.

Przykłady wyżey podane iuż doſyć obiaśnić były powinny, iak daley ſobie w tym działaniu poſtąpić.

*Fig.* 6. Podobnego ſpoſobu użyć należy gdy kąt oſtry ieſt dany, i bok iemu przeciwny więkſzy od drugiego boku danego. Ta tylko ieſt różnica, że w drugim ſpoſobie poſtępowania linia AB, będzie ſummą a nie różnicą linii BD, AD.

*Fig.* 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, mnieyſzy ieſt od boku danego AC, który ſłuży za ramię temuż kątowi; w takim razie wſtawa kąta B wynaleziona z proporcyi: CB : AC = wſt: A wſt: B może być równie wſtawą dwóch kątow B, B, iednego oſtrego, a drugiego roztwartego, i tamten ſpełniaiącego do 180°. Podług drugiego ſpoſobu poſtępowania, liniia AB, AB może być ſummą, albo różnicą linii AD, BD albo BD; co daie dwa odmienne Troykąty: ACB', ACB; które lubo maią w ſobie dwa boki dane i kąt oſtry także dany, różnią ſię iednak trze-

cim

cim bokiem, i dwoma innemi kątami. Zgadza się to zupełnie z tym, co się iuż w Geometryi okazało w Rozd. II.

334. *Przystosowanie 6.* Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą być wpisane.

*Rozwiązanie.* Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta w środku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

| *Liczba boków Wielokąta.* | | *Połowy kątów w środku* | | *Wst: Połowy kątów w środku* |
|---|---|---|---|---|
| 3 | - | 60° | - | 86602. |
| 4 | - | 45° | - | 70711 |
| 5 | - | 36° | - | 58779 |
| 6 | - | 30° | - | 50000 |
| 7 | - | 250 $_{7}$ | - | 43388 |
| 8 | - | $22^{\circ}\frac{1}{2}$ | - | 38671 |
| 9 | - | 20° | - | 34202 |
| 10 | - | 18 | - | 30902 |
| 11 | - | $16^{\circ}\frac{4}{11}$ | - | 28171 |
| 12 | - | 15° | - | 25882 |
| 15 | - | 12° | - | 20791 |
| 16 | - | $11^{\circ}\frac{1}{4}$ | - | 19509 |
| 20 | - | 9° | - | 15643 |
| 24 | - | $7^{\circ}\frac{1}{2}$ | - | 13053 |
| i t. d. | | i t. d. | | i t. d. |

Te wſtawy dwa razy wzięte ſą bokami wielokątów wpiſanych w koło, którego promień = 100000.

Niechby był Troykąt proſtokątny, którego wiadome ſą dwa ramiona kąta proſtego; trzeba znaleść przeciw proſtkątną, i dwa inne kąty.

Już ſię wyżey pokazało, że maiąc dane dwa boki w Troykącie proſtokątnym, znayduie ſię przeciw proſtkątna, dodawſzy do ſiebie dwa kwadraty tychże boków, i z ſummy wyciągnąwſzy pierwiaſtek kwadratowy. *Ale* gdy liczby oznaczaiące wielkości boków danych ſą bardzo wielkie; nie mało czaſu trzebaby na podnieſienie tych liczb do kwadratu; a że i ſumma tych kwadratów będzie bardzo wielka, iż z niey pierwiaſtku kwadratowego wyciągnąć przez logarytmy nie można, a wyciągać go zwyczaynym ſpoſobem długaby praca była; przeto dla więkſzey wygody, w tey i wielu innych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inne ieſzcze, oprocz wſtaw, linie.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiego, a od iednego końca, tego łuku niech będzie poprowadzona ſtyczna, tak dale-

daleko, aż się spotka z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczney zamknięta między punktem dotknięcia koła, i promieniem przedłużonym nazywa się *Styczną Troykątmierską* (Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku. Liniia zaś zawarta między środkiem koła, i między punktem, gdzie promień przedłużony przecina styczną, nazywa się *Sieczną Troykątmierską*. (Secans Trigonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Y tak liniie AT, CT są, pierwsza styczną, a druga sieczną łuku AB. Jest także pierwsza liniia styczną, a druga sieczną kąta ACB, biorąc za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, iest dopełnieniem do 90°, łuku AB; ieżeli tedy poprowadziemy styczną FP, aż do iey spotkania się z promieniem CA przedłużonym; liniia FP, będzie styczną, a CP sieczną dopełnienia łuku AB, a inaczey ieszcze pierwsza nazywa się *Dostyczną* (cotangens) druga zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB. *Tab. XVIII. Fig. 1.*

Jak względem wstaw, tak względem stycznych i siecznych, uważano w tablicach, iedne łuki tyle przewyższaiące 45°, ile drugie, nie dochodzą 45°; uważano

zatym

zatym i co do ſtycznych, i co do ſiecznych dopełnienia iednych łuków względem drugich.

336. *Naprzykład*; Troykąty DCB, ACT ſą podobne; więc.

1. DC : DB = AC : AT, to ieſt doſtawa tak ſię ma do wſtawy, iak promień do ſtyczney.

2. DC : CB = AC : CT, czyli doſtawa do promienia, iak promień do ſieczney.

Tak też, dla podobieńſtwa Troykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wſtawa do doſtawy iak promień do doſtyczney.

2. Wſtawa do promienia, iak promień do doſieczney.

Maiąc ſtyczne, łatwo można wyrachować doſtyczne. Bo ponieważ podobne ſą Troykąty ACT, FPC, będzie, AT : AC = CF : FP; to ieſt promień będzie średnim Geometrycznym między ſtyczną i doſtyczną. Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa ſię ſummie logarytmów ſtyczney i doſtyczney.

337.

337. Styczne rosną, zacząwszy od o, aż do styczney 45°, która się równa promieniowi, (bo w tym razie Troykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90°, których styczna będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie, a zatym większą iest, od wszelkiey długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechby był Troykąt iakikolwiek prostokątny, naprzykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB. *Tab. XIX. Fig. 1*

Wziąwszy za promień, naprzykład liniią CA, liniia AB będzie styczną, a liniia CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, to iest: promień wyrażony w tablicach przez 100000; liczba stopniów, przy których znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą liniią AB, czyli styczną, pokazałaby ważność kąta C; i znowu liczba między siecznemi odpowiadaiąca kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniia AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w ktòrych wyrażona ieſt wſtawa cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, pierwſzą AC: AB = Pr. ſtyczney C. z którey doydziemy ważności kąta C; drugą Pr. Siecz C = AC: CB.

*Przykł.* Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: pro-
- - mienia ieſt - 13,7541954.
Log. AC - - 3,9275757.

Rożnica, czyli Log. ſtyczney
- - - C = 9,8266197.
a zatym kąt C = 33°, 51.

Log. AC = 3,9275757.
Log. ſiecz C (odcią-
wſzy Log. Pr.) = - - 0,0806610.

Summa — 4,0082367. =

Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwaga* Gdyby przyſzło wyciągnąć pierwiaſtek kwadratowy z ſummy kwadratów AC + AB², znaleźlibyśmy wa-

ważność przeciw prostkątney BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193, a zatym nie zgadzaiącą się z ważnością wyżey znalezioną, 10191 ½; co ztąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugie, i przestało się na samych stopniach, i minutach pierwszych; i to opuszczenie sprawiło, że ważność BC, mnieysa iednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe iest bardzo małe, gdyż od prawdziwey ważności różni się tylko mało co więcey, iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa tey omyłki taka być może.

Ponieważ różnica między logarytmem styczney C, znalezionym, i logarytmem tablic nayblizszym, iest 874; a różnica dwóch logarytmów Tablic mnieyszego i większego od logarytmu znalezionego, iest: 2730, więc będzie, 2730 : 874 = 60'' : 19'', a zatym kąt C = 33° 51' 19''

Log. - AC = 3,9275757.
Log: siecz: C.
(odciąwszy Log. Pr.) = 0,0806880.

Sum: czyli Log. BC = 4,0082637.
więc BC = 1,0192 ½ = 10192,1.

340. *Przystosawanie.* W Troykącie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niemi, znaleść bok trzeci, i dwa inne kąty?

Fig. 2. Niech będzie Troykąt ACB, w którym dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba ztąd doyiść boku AB, i dwoch innych kątów.

*Rozwiąz.* Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC; w Troykącie prostokątnym BCD wiemy przeciw prostkątną BC, i kąt dany C, a zatym doydziemy dwòch boków BD, DC; a że wiadoma także iest podstawa AC. więc odiąwszy CD od AC znaydziemy AD; i znowu w Troykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doyść będzie można (338) innych dwóch kątów, i przeciwprostkątney AB.

Ten sposob w tym iest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proproporcye, aby doyść boku AB. Jako zaś, to, co z każdey z pierwszych trzech proporcyi wypada wchodzi w czwartą proporcyą, tak i omyłki tam popełniane, tu wpływaią.

Ażeby więc w tym co z ostatniey proporcyi wypadnie, uniknąć uchybienia, należy

ży iak naydokładnieyſzy rachunek czynić w trzech pierwſzych. Y to ieſzcze przydać potrzeba, że w tym ſpoſobie działania ſzukać ſię muſi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wyſokości BD, lubo o nię nie maſz zapytania.

341 Gdyby przyſzło dochodzić ſamey tylko linii AB, w tym razie można by użyć naſtępuiącego ſpoſobu.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times CD.$

Aże ieſt $BC : CD = Pr:$ Doſtawy BCD

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = Pr.$ doſt:BCD.

a zatym $2\,AC \times CD = \frac{2AC \times BC \times \text{doſt}: BCD}{Pr.}$

A ztąd $AB^2 = AC^2 + BC^2 - \frac{2AC \times BC \times \text{Doſt}: BCD}{Pr:}$

Ze zaś tey oſtatniey ilości nie można zawſze rozłożyć na inne mnożące ią ilości, więc przez ſame logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używa ſię poſpolicie naſtępuiącey proporcyi.

342.

342. *Twierdz:* 2. Summa dwóch boków Troykąta, tak ſię ma do rożnicy tychże boków, iak ſtyczna połowy ſummy dwóch kątów przeciwnych tym bokom, do ſtyczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu nayprzod wyłożyć uczniom, co ſię rozumi przez wyrazy tey proporcyi; a wſzczegulnosci pokazać im, że ſtoſunek między ſtycznemi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie ieſt ten ſam, co między ſtycznemi całych tych kątów albo łuków. Widocznie ſię to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

*Fig.* 3. Niech będzie Troykąt ABC, w którym bok AB, mnieyſzy ieſt od boku AC; w tym Troykącie będzie $AC. + AB : AC - AB = \text{ſtycz: } \frac{B + C}{2} : \text{ſtycz: } \frac{B - C}{2}$.

*Dowodz:* Wziąwſzy AD = AB, i pociągnąwſzy BD, Troykąt równoramienny ABD, i Troykąt nie równoramienny ABC, maią kąt ſpolny A. Więc ſumma kątów ABD, ADB, równa ſię ſummie kątów ABC, ACB; azatym ieden z kątów Troykąta równoramiennego, nap: kąt ABD, równa ſię połowie ſummy dwóch ką-

kątów ABC, ACB Troykąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składa się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów; aże kąt ABD, iest połową ich summy, więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Linia DC iest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równe części w punkcie E, liniia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. Aże bok większy AC. równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków, więc AE będzie połową ich summy, gdy CE iest połową różnicy; a zatym liniie AE, CE. tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tym więc całe działanie rozchodzi się, aby pokazać, iż styczne kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie, iak liniie AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Ponieważ Troykąt BAD iest równoramiennym, liniie BF, FD będą równe; a że też są równe liniie DE, CE, więc pociągnąwszy linią FE, podobne będą Troykąty: BDC, FDE, i linie FE, BC równoodległe; a zatym i Troykąty AFE, AGC są podobne; Będzie więc AE : CE =

AF.

AF : FG. Że zaś wziąwſzy za promień liniią BF, liniie FA, FG. będą ſtycznemi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE : CE = ſtycz: ABD: ſtycz: CBD; albo, $\frac{AC + AB}{2} : \frac{AC - AB}{2} =$ ſtycz: $\frac{B + C}{2}$ : ſtycz: $\frac{B - C}{2}$. albo nakoniec, $AC + AB : AC - AB =$ ſtycz: $\frac{B + C}{2}$ : ſtycz: $\frac{B - C}{2}$.

343. *Przyſtoſowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, ſą wiadome, będzie wiadoma ich ſumma AC + AB, i ich różnica AC — AB; gdy także wiemy kąt A, wiedzieć tym ſamym będziemy ſummę i połowę ſummy dwoch innych kątów B i C, a zatym i ſtyczną połowy tey ſummy; więc i czwartego wyrazu proporcyi poprzedzaiącey, to iest ſtyczney połowy różnicy tych dwóch kątów doydziemy, a ztąd wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich ſummy, i połowę różnicy; gdy połowę ſummy do połowy różnicy dodamy, znaydziemy kąt większy B, a odiąwſzy połowę różnicy od połowy ſummy, okaże ſię kąt mnieyſzy C. Znaydziemy nakoniec i bok trzeci BC.

*Przykł:* Niech będzie - -

- AC = 2452. AC + AB = 4296.
AB = 1844, AC — AB = 608,
A = 44° B + C = 136°.
$\frac{B + C}{2}$ = - 68°.

4296: 608 - - - -
ſtycz: 68° ſtycz. $\frac{B - C}{2}$.

Log. ſtycz: 68° = 10,3935904,

Log. 608 = 2,7839036,

Summa - - 13,1774940.

Log. 4296 = 3,6330643.

Rożnica = 9,5444297. =

- - - Log. ſtycz: 19 . 18'+

Więc $\frac{B - C}{2}$ = 19°. 18'. +

Aże $\frac{B + C}{2}$ = 68° więc -

- - B = 87°. 18', +

C = 48°. 42'. —

Wſt: C : wſt. A = AB : BC

Log. AB = 3,2657609.
Log. wſt: A = 9.8417713.

Summa = 13,1075322.
Log. wſt. C = 9,8757927 —

Reſzta, to ieſt Log: BC = 32317395 +
BC = 1705 +

Aby ſię przeświadczyć o dokładności tego działania ſzukaymy BC, i przez drugą proporcyą ; wſt: B : wſt: A = AC : BC.

Log. AC = 3,3895205.
Log. wſt: A = 9,8417713.

Summa = 13,2312918.
Log. wſt. B = 9,9995176 +

Reſzta = 3,2317742 —
więc BC = 1705.2 —

344. *Przyſtoſowanie* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwoch mieyſc nie doſtępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podſtawę i wy-

wyznaczyć kąty, które przy końcach podſtawy czynią dwie liniie wykierowane ku dwom punktom, których odległości ſzukamy. Można doyść i przez rachunek żądaney odległości.

Niech będzie AB podſtawa wymierzona, i wyznaczone kąty: xAB i AB,xBA, i BA. Fig. 4.

Ponieważ w Troykącie x AB, wiemy dwa kąty przy podſtawie, odiąwſzy więc ich ſummę od dwoch kątów proſtych, albo od 180°, reſzta pokaże kąt trzeci A xB.

Podobnym ſpoſobem doydziemy i kąta A i B.

W Troykącie AxB, maiąc wiadomą podſtawę AB, i wſzyſtkie kąty, można doyiść dwóch innych boków, a wſzczegulności linii Ax.

Podobnie i w Troykącie A y B z wiadomego boku AB, i wſzyſtkich kątow, można wyznaczyć dwa inne boki; a wſzczegulności liniią A y.

W Troykącie na koniec xAy znaiąc dwa boki Ax, Ay, i kąt x Ay między niemi

niemi zawarty, (który ieſt różnicą między kątem wyznaczonym x AB, y AB;) można doyść linii xy, to ieſt żądaney odległości.

*Uwaga.* Ponieważ wyznaczenie linii xy, zawiſło od linii Ax, Ay; dokładność też w wyznaczeniu linii xy, zawiſła od tey dokładności, z którą dwie tamte linie były wyznaczone.

*Przykład.* Niech będzie

| | |
|---|---|
| x AB = 77° | więc A x B = 49°. |
| y AB = 42° | A y B = 36°. |
| y BA = 102° | x A y = 35°. |
| xBA = 54°. | |
| AB = 1200. | |

Wſt: AxB : wſt: xBA = AB : Ax.

| | | |
|---|---|---|
| Log. | AB = | 3,0791812. |
| Log. wſt. | x BA = | 9,9079576. |
| Summa | = | 12,9871388. |
| Log. wſt. | A x B = | 9,8777799. |
| Reſzta | = | 3,1093589, = Lo: Ax |
| | Ax | 1286,35. |

Wſt:

Wſt: A y B : wſt. ABy = AB : Ay.

Log. AB = 3,0791812.
Log. wſt. ABy = 9,9904044.

Summa - 13,1695856.
Log. wſt. A y B = 9,7692187.

Reſzta = 3,4003669. =
- - - - Log. Ay.

Ay = 2514. bardzo bliſko

Znalazſzy bok Ax = 1286,35.
Ay = 2514.

Kąt między temi bokami zawarty: x Ay = 35°.

Będzie Ax + Ay = 3800,35
Ay — Ax = 1227,05.
Axy + Ayx = 145°

$$\frac{Axy + Ayx}{2} = 72^\circ\tfrac{1}{2}.$$

Więc (podług Twierdz 2.); 3800,35: 1227:65 = ſtycz: $72^\circ\frac{1}{2}$: ſtyczna - - $\frac{Axy - Ayx}{2}$.

Log. ftycz: $72^\circ \frac{1}{2} = 10,5012777$.

Log. $1227,35 = 3,0890735$.

Summa = - 13,5903512.

Log. $3800,35 = 3,5798237$.

Rożnica = - 10,0105275. =

- - Log. ftycz: $45^\circ\ 42'$—.

więc $\frac{Axy - Ayx}{2} = 45^\circ,\ 42' -$

Aże ieft $\frac{Axy + Ayx}{2} = 72^\circ,\ 30'$

Więc Axy = $118\ \ 12' -$
Ayx = $26^\circ\ \ 48 +$

Maiąc wiadome wfzyftkie kąty, w Trykącie xAy, i oprocz tego dwa boki: AxAy, znaydziemy bok trzeci xy, to ieft odległość, którey fzukamy, przez iednę z tych dwóch proporcyi:

Wft: Ayx: wft: xAy = Ax: xy.
albo wft. Axy : wft. xAy = Ay: xy.

Szuka-

Szukaymy boku xy przez pierwſzą nap: proporcyą;

Będzie Log, Ax = 3,1093589.
Log. wſt. xAy = 9,7585913.

Summa = 12,8679502.
Log. wſt. Ayx = 9,6540586 —

Roż: to ieſt Log. xy = 3,2138916 +
więc xy = 1636 +

Zoſtaie ieſzcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Troykącie, ſzukamy kątów iego.

Spoſob zwyczaynie używany, zawiſł na tym, aby ſzukać dwóch odcinków podſtawy oddzielonych przez proſtopadłą, na tę podſtawę ſpuſzczoną, od wierzchołku kąta iey przeciwnego.

345. *Twierdz: przybrane.* Podſtawa Troykąta, tak ſię ma do ſummy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podſtawy.

Niech będzie Troykąt ABC, w którym z wierzchołka C, ſpuſzczona ieſt proſtopadła CD, na podſtawę AB; w tym Troykącie, AB : BC + AC = BC — AC : BD — AD. *Fig. 5.*

Od punktu C, iak od środka, promieniem CA nakreślmy koło, które przetnie podſtawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatym - - -

$BE = BC + AC$ (bo $AC = CE$;)
$BF = BC - AC$ (bo $AC = CF$:)
$BG = BD - AD$ (bo $AD = DG$:)

A ponieważ ſieczne BA, BE od iednego punktu B wychodzą, więc (231) $BA : BE = BF : BG$; to ieſt, tak ſię ma podſtawa BA do ſummy dwoch boków $= BE$; iak ſię ma rożnica tychże boków $= BF$, do rożnicy BG odcinków, które czyni proſtopadła CD ſpuſzczona z wierzchołka kąta C. na Podſtawę.

346. *Przyſtoſowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy ſummę i różnicę, wiedzieć będziemy i każdy z nich z oſobna, iako to iuż ſię wyżey pokazało; będzie albowiem większy odcinek $BD = \frac{AB + BG}{2}$, a mnieyſzy $AD = \frac{AB - BG}{2}$.

Aże, $BC : BD =$ Pr. Doſt: B.
A zaś $AC : AD =$ Pr. Doſt. A.
Więc doydziemy i kątów B, i A.

*Przykł.*

*Przykł.* Niech będzie - -

AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log. BC + AC = 3,1894903.
Log, BC — AC = 2,5092025.

Summa = 5,6986928.

Log. AB = 3,0791812.

Reſzta = 2,6195116.

Więc BD — AD = 416,4. bardzo bliſko.

$\frac{AB}{2} = 600.$

$\frac{BD - AD}{2} = 208,2$

Summa = 808,2. = BD.
Rożnica = 391,8 = AD.

BC : BD = Pr. Doſt: B.

Log. BD z przydanym Log. Pr. = - - - 12.9075188.
Log. BC = 2,9708116.

Reſzta = 9,9367072 =

Y Log,

Log. Doſt: B. więc B = 30°. 11' 15."
AC : AD = Pr. Doſt. A.

Log: AD z przydanym Log. Pr. =
- - - 12,5930644.
Log. AC = 2,7867514.

Reſzta = 9,8063130. =

Log. Doſt. A. więc A = 50° 12'. 23".
C = 99°. 36'. 22".

Dla zapewnienia ſię o tym, można ſzukać ieżeli ſtoſunek wſtaw kątów A, i B równa ſię ſtoſunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w ſamey rzeczy rownał ſię, gdy w proporcyi, którey trzema wyrazami będą, BC, AC. wſt. A za czwarty wyraz wypadnie wſtawa kąta B, teyże ſamey iak wyżey znalezliśmy ważności.

Log. wſt. A = 9,8855618.
Log. AC = 2,7767514.

Summa = 12,6723132.
Log. BC = 2,0708116.

Reſzta = 9,7015016. =
Log. wſt. B.

Kąt B, odpowiadaiący temu logarytmowi, różni ſię mniey niż 3" od wyżey znalezionego.

347. *Uwaga.* Nie trzeba opuſzczać takowych doświadczeń, zwłaſzcza, gdy rachunki zawiſły iedne od drugich.

W tym oſtatnim razie, naylepiey ieſt wziąść za podſtawę bok naywiękſzy Troykąta; bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziemy, iż kąty przy tey podſtawie ſą oſtre.

## PRZYDATEK I.

### *Przyſtoſowania Trygonometryi do rożnych działań na gruncie.*

348. *PRzyſtoſowanie* 1. Wyznaczywſzy na gruncie; a potym wyrachowawſzy położenia i odległości dwóch punktów, względem iedney podſtawy, wzięta była za drugą podſtawę odległość tych dwóch punktów i użyto iey do wyznaczenia położeń, innych Punktów, ktòre z pierwſzych ſtanowiſk, albo były nie widzialne, albo też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych oſtatnich punktów względem pierwſzey podſtawy.

Niech AB wyraża pierwſzą podſtawę; x y, dwa punkta, których położenia, i odległo- *Tab. XX Fig. 1.*

ległości wyznaczone iuż ſą względem tey podſtawy, przez wymierzenie kątów przy A i B. Weźmy potym x y za drugą podſtawę dla wyznaczenia położenia punktu z, niewidzialnego z pierwſzych ſtanowiſk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Jakże to położenie punktu z. wyznaczemy, względem pierwſzey podſtawy AB?

*Spoſob poſtępowania przez rachunek:*

1. W Trykącie A x B wyznaczemy Ax.

2. W Troykącie A y B wyznaczmy Ay.

3. W Troykącie xAy wiadome maiąc: Ax, Ay, i kąt xAy, wyznaczmy: xy, i kąt: Axy.

4. W Troykącie xzy, wiadomą maiąc podſtawę, i kąty wſzyſtkie, wyznaczmy xz.

5. W Troykącie Azx wiadome maiąc: Ax, zx, i kąt Axz wyznaczmy Az.

Podobnie można wyznaczyć Bz.

349. *Uwaga*. Tym ſpoſobem poſtępuiąc, można także ſprawdzać działan a iedne przez drugie czynione z różnych punktów ſtanowiſk.

350. *Przystosowanie* 2. Do iakieykolwiek linii czyniącey kąt wiadomy z podstawą stosować położenia punktów wyznaczonych iuż względem tey podstawy.

Niech będzie AC liniia czyniąca kąt wiadomy z podstawą AB, i niech x, będzie punktem, którego położenie iuż iest wyznaczone względem podstawy AB; trzeba ztąd doyść położenia tego punktu względem linii AC. *Fig*, 2.

Doydziemy tego, spuściwszy prostopadłą xP na liniią AB, i wyznaczywszy wielkość tey prostopadłey, iako też iey odległość AP, od punktu A.

*Sposob postępowania przez rachunek.*

W Troykącie AxB można było wyznaczyć liniią Ax; kąt xAB iest też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAx, który iest różnicą kątów CAB, xAB. W Troykącie tedy PAx, maiąc wiadome kąty, i przeciwprostkątną Ax, można będzie wyznaczyć liniie: AP, i Px.

351. *Przyst:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cienciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech

Fig. 3. Niech będzie AB liniia dana, na którey nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła.

Niech będzie C, środek koła, szukanego; poprowadźmy liniią CD do środka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. w Troykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danemu, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD, iest iego dopełnieniem. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a tym można wyznaczyć, promień koła szukanego, z tey proporcyi; iak się ma promień do sieczney kąta danego, tak się ma połowa cięciwy daney do promienia koła, ktorego szukamy.

352. *Uwaga.* Stosunek AD do CD, równy iest stosunkowi wstawy całey, czyli promienia, do styczney kąta CAD.

Aże, ieżeli AB iest bokiem wielokąta foremnego, będzie CD promieniem koła wpisanego w ten wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta foremnego, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promień koła wpisanego i opisanego, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wsta-

1. Wſtawa cała, tak ſię ma do ſtyczney połowy kąta w środku koła, iak połowa boku wielokąta do promienia koła wpiſanego.

2. Wſtawa cała tak ſię ma do doſieczney połowy kąta w środku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opiſanego.

353. *Przyſtoſowanie* 4. Wyznaczywſzy trzy boki Troykąta na gruncie iakim uważanego, i znaiąc kąty, pod któremi widziemy te trzy boki z iednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Tróykąta.

Niech ABC wyraża Troykąt, ktòrego wſzyſtkich boków iuż dośliśmy, niech x, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod ktôtemi dały nam ſię widzieć liniie, AB, BC, AC; trzeba ieſzcze wyrachować liniie: Ax, Bx, Cx. *Fig.* 4

Niech będą D, i E, środki koł, których odcinki nakreślone na liniiach AB, i BC mogą zawierać w ſobie kąty równe tym, pod którémi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt x będzie w przecięciu tych dwóch koł.

Dwa

Dwa promienie BD, BE, mogą być wyrachowane tak, jak w przystosowaniu 3.

W Troykącie ABC, w ktorym wszystkie boki są wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD iest wiadomy, bo iest dopełnieniem kąta wiadomego AxB; więc wiadomy iest także i kąt CBD. Aże wiemy i kąt CBE, który iest dopełnieniem kąta CxB, więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatym w Troykącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między niemi zawarty; a zatym można wyznaczyć wysokość BF, która iest połową linii szukaney Bx; albo, (co krócey ieszcze będzie) można, w tym Troykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt w środku D, równa się kątowi xAB, wspieraiącemu się na łuku dwa razy większym; a kąt w środku E, iest spełnieniem (w tey figurze) kąta xCB; więc kąty; BAx, BCx są wiadome; a zatym w Troykątach: BAx, BCx, wiemy kąty wszystkie, i boki: BA, BC; zkąd będzie można wyznaczyć linie Ax, Bx, Cx, których szukamy.

Jeden prawie iest sposob postępowania na iakiekolwiek położenie punktu x. W tym tylko bywa odmienny, że czasem trzeba dodawać, a czasem odeymować

kąty

kąty znayduiące się przy B; i że czasem kąty D i E, równe są kątom przy A i C, a czasem są ich spełnieniem.

354. Rachunek ten może być ieszcze skròconym w nie których przypadkach szczegulnych.

*Przykład* 1. Niech punkt x, znayduie się na przedłużeniu iednego z boków Troykąta ABC, nap: na przedłużeniu boku AB. *Tab. XXI. Fig. 1.*

W Troykącie CAx, wiadome są kąty A, x, i bok CA; więc bedzie można wyrachować boki: Ax, Cx.

*Przykład* 2. Niech trzy punkta: A.B,C, będą na iedney linii. *Fig. 2.*

Prostokąty Ax × Cx, i Bx × Cx są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłey spuszczoney od x, na AB, i z średnicy koła opisanego na Troykącie AxC; drugi, prostokątowi z teyże prostopadłey, i z średnicy koła opisanego na Troykącie CxB; więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siębie, iak i dwa drugie. Aże pierwsze tak się maią do siebie, iak liniie; Ax, Bx, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie średnice; więc stosunek Ax do Bx ieſt

ieſt wiadomy, bo ieſt równy ſtoſunkowi średnicy koła opiſanego na Troykącie ACx, do średnicy koła opiſanego na Troykącie BCx albo równy ſtoſunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podſtawy w Troykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AxB, a zatym wiadomy, i dwa ramiona równe dwom wyżey wſpomnionym promieniom; gdybyśmy tę podſtawę znaleźli równą linii AB; liniie też Ax, Bx, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podſtawa nie była ròwna linii AB, tedy z dwòch naſtępuiących proporcyi, doydziemy boków: Ax, Bx.

1. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień pierwſzy do Ax.

2. Jak ſię ma podſtawa znaleziona, do podſtawy AB, tak ſię ma promień drugi do Bx.

Tym ſpoſobem możemy też doświadczać, czyli działania naſze czynione na ziemi; były dokładne.

355. *Przyſtos*: Niech będzie dana linia proſta na gruncie; wyznaczyć, bez mierzenia odległości i położenia względem tey linii, dwòch punktów, z których widziemy obadwa iey końce.

Niechby

Niechby wiadoma była nap: liniia AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdego widzieć można końce A, i B, tey linii; wyznaczyć odległości, i położenia tych dwóch punktów, C, i D, tak względem siebie, iak i względem linii A B, nie mierząc pierwey żadney z tych odległości. *Fig.* 3.

Z punktów C, i D, wyznaczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatym i kąty: ACD, BDC.

Dawszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niey dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdybyśmy przypadkiem ważność tey ostatniey linii AB, znaleźli równą prawdziwey iey ważności. którą wiemy; byłoby to dowodem, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatym i innych linii.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB, nie była równa ważności iey wiadomey; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się ma ważność mniemana linii AB, do ważności iey prawdziwey, tak się ma ważność mniemana linii CD, do ważności iey prawdziwey.

*Przysto-*

*Przyſtoſowania do miar wyſokości.*

Mogą Nauczyciele namienić tylko o ſpoſobach wyznaczenia wyſokości iakiey, czyli to przyſtępney, czyli też nie doſtępney, przez ſame żerdzie, albo przez odbiianie promienia światła padaiącego na powierzchnią iaką płaſką, i ſpoſobną do odbiiania, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (obiectum) ktorego wyſokość wyznaczyć mamy.

Pierwſzy z tych ſpoſobów, iako w przepiſach ſwoich, i z przyczyny łatwości, ieſt bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doſkonały. W ogulności nawet mówiąc, należy zawſze powątpiewać o działaniach, choćby też z naylepſzemi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie iakiey wyſokości; iednoſtayna albowiem w ſobie wyſokość, nap: góry iakiey, może ſię wydawać czaſem więkſzą, a czaſem mnieyſzą, podług nie iednakowego ſtanu w którym ſię znaydować zwykła naſza. *Powietrznia*; (atmoſphera) iako o tym obſzerniey będzie w Fizyce.

356. *Przyſtos.* I. Niech będzie iaka wyſokość nie wiadoma, do którey iednak

można

można przyſtąpić; trzeba wyznaczyć iey wielkość; z punktu iakiego oddalonego od teyże wyſokości.

Wymierzmy podſtawę od punktu na gruncie obranego, aż do ſpodku tey wyſokości; od tegoż punktu uważaymy iaki kąt czynią na płaſzczyznie pionowey dwie linije, iedna ku wierzchołkowi tey wyſokości, a druga po ziemnie wykierowana. Znaydziemy wielkość tey wyſokości nad liniią poziemną (którą perſpektywa poziemnie uſtawiona pokazuie) przez naſtępuiącą proporcyą; Jak ſię ma wſtawa cała do ſtyczney kąta uważonego, tak ſię ma podſtawa wymierzona do wyſokości ſzukaney. Dodawſzy do tey wyſokości, wyſokość narzędzia, znaydziemy całą wyſokość, którey ſzukaliśmy. (g)

357. *Uwaga.* Rzadko ſię trafia, aby całe przyſtąpić można do ſpodku wyſokości, którą wyznaczyć przypada. Tak nap:

---

(g) *W dalſzych przykładach trzeba zawſze na to pamiętać, aby wyſokość narzędzia dodawać do wyrachowaney Trygonometrycznie wyſokości; co lubo ſię wyraźnie kłaść nie będzie, ſame iednak okoliczności doſtatecznie potrzebę tego okażą.*

napzykład, maiąc wyznaczyć wyſokość wierzchołka wieży iakiey, baſzty i t. d. nie można wymierzać podſtawy, tylko aż do ſpodku iey murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baſzty i t. d. a ztąd wnieść położenie iey, środka, a zatym i długość, którą dodać potrzeba do podſtawy wymierzoney.

358 *Przyſtos.* 2. Niech będzie wiadoma wyſokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypada odległość pnnktu położonego na gruncie, a widzialnego z mieyſca ſtanowiſka.

Uſtawiwſzy kątomierz na płaſzczyznie pionowey, iak wyżey, naznaczmy kąt, który czyni perſpektywa iedna w poziemnym położeniu, a druga wykierowana ku punktowi, którego odległości ſzukamy. Zrobmy potym tę proporcyą; iak: ſię

(i) *Wyſokości wieży. lub iakiego podobnego budynku łatwo doyść można, ſpuściwſzy z góry na doł ſznur, który potym zmierzony, da poznać tę wyſokość. Trzeba iednak mieć baczność na to, aby ſznur iednakowo wſzędzie był wyciągniony. Obacz między innemi Dzieło iuż wyżey zalecone P. de Luc. Tom.* 2. § 516.

ſię ma wſtawa cała do doſtyczney kąta naznaczonego, tak ſię ma wyſokość dana do odległości ſzukaney,

*Uwaga.* Można tym ſpoſobem wyznaczyć odległość od ſpodku wyſokości iakiey, tylu punktów, ile zechcemy; maiąc iuż wiadomą wyſokość, z ktòrey wierzchołka wyznaczać przypada te odległości. Uważaiąc zaś, i, znacząc kąty, które zrobi perſpektywa (k) kierowana do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, iednych względem drugich.

350. *Przyſtos. 3.* Maiąc wiadomą odległość punktu iakiego od ſpodku wyſokości, na której ſię ſtoi, wyznaczyć tę wyſokość.

Uwa-

---

(*k*) *Te kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perſpektywa coraz do innego punktu na gruncie położonego, kierowana, iako bardziey płaſzczyzny pionowe przechodzące przez perſpektywę za każdym celowianiem. Naywygodniey ſię to działanie wykona: gdy kątomierz będzie miał półkole proſtopadłe do reſzty z narzędzia i opatrzone perſpektywą ruchomą.*

Uważywszy kąt tak iak wyżey, zrobmy tę proporcyą; Jak się ma wstawa cała do stycznej kąta uważonego, tak się ma odległość dana do wysokości szukaney.

360. *Przystos.* 4. Niech będzie wysokość niedostępna, trzeba ią wyznaczyć.

Sposob postępowania naypospoliciey używany, zawisł na tym, aby wymierzyć podstawę iaką wprost tey wysokości, którey szukamy, i naznaczyć kąty pod ktoremi z obydwóch końców tey podstawy, widziemy wysokość szukaną. Mozna ztąd doyść, tak wysokości, iako też i odległości iey spodka, od obydwóch końców podstawy.

Fig. 4. Niech SP wyraża wysokość, a AB podstawę wymierzoną wprost ku tey wysokości. Wyznaczmy kąty A i B, prze perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, a drugą ku wierzchołkowi S, wykierowaną.

W Troykącie ASB, zachodzi ta proporcya.

Wst: ASB: wst. A = AB : BS.

W Troykącie BSP, iest;

Wst: cała: wst. B = SB : SP.

Więc wst: cała × wst. ASB : wst: A × wst. B = AB : SP.

361. *Uwaga 1.* Tego ſpoſobu używaiąc, można nayprzod uchybić w braniu takiey podſtawy, ktoraby przedłużona proſto prowadziła, do wyſokości podaney do wymierzenia; ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno ieſt utrafić na takie podſtawy położenie, będzie więc i wyſokość ztąd wyrachowana, niepewna. Powtore, gdy podſtawa AB, ieſt bardzo nachylona względem linii AS, BS, kąt A SB, pod ktorym pokazuie ſię ta podſtawa AB, ieſt bardzo mały względem kąta ASP, a zatym i podſtawa AB wymierzona ieſt bardzo mała względem całey podſtawy AP; zkąd także wyznaczenie wyſokości PS będzie mniey dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie, ktorego używamy, opatrzone ieſt w połkole pionowe, to będzie ſłużyć do dania tak dobrego podſtawie położenia, iakiego tylko grunt pozwoli.

Niech liniia AB wyraża iakąkolwiek podſtawę wymierzoną, a liniia SP, niech wyraża wyſokość, ktorey ſzukamy. *Fig.* 5.

Uſtawiwſzy połkole pionowe tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatym, aby liniia SP, wpadała na płaſzczyznę tego połkola; uważaymy

kąt SAP na płaſzczyznie pionowey, i kąt PAB wyznaczony na płaſzczyznie kątomierza poziemnie uſtawionego. Zrobmy to ſamo i na drugim ſtanowiſku, przy punkcie B.

W Troykącie PAB, gdzie wiadoma ieſt podſtawa, i wſzyſtkie kąty, będzie:

Wſt. APB: wſt. ABP = AB: AP.

W Troykącie proſtokątnym SAP, ieſt:

Wſt. cała: ſtyczna SAP = AP : SP.

Więc wſt. cała × wſt. APB: wſt. ABP × ſtyczn. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dla iakiey zawady nie można razem brać kątów pionowych, i kątów poziemnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnaby oſobno wymierzyć kąty poziemne: PAB, PBA. Ztym wſzyſtkim wyznaczenie tego ciągu z wielką częſtokroć pracą przychodzi.

363. *Przyſtos.* 5. Niech będzie dana nija na iakim gruncie, i niech będzie wyſokość niewiadoma, z którey wierzchołka można widzieć końce tey linii daney. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwoch

końców, od ſpodka wyſokości niewiadomey, i też ſamę wyſokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wyſokości, kąty na płaſzczyznie pionowey, zawarte między linią pionową albo nitką z ciężarem zawieſzoną, i między perſpektywą wykierowaną naſtępnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od ſpodka wyſokości, tak ſię do ſiebie mieć będą, iak ſtyczne kątów uważanych; (będą zaś te odległości ſtycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wyſokość za promień wzięta będzie,) a zatym ſtoſunek tych odległości będzie wiadomy. Uważaymy i ten kąt, który ſię zrobi na płaſzczyznie poziemney kątomierza, przez płaſzczyzny pionowe, na których znaydować ſię będzie perſpektywa naſtępuie do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt, równy kątowi zawartemu między dwiema liniami prowadzonemi od końców podſtawy do ſpodka wyſokości, będzie kątem w wierzchołku Troykąta, maiącego wiadomą podſtawę i wiadomy ſtoſunek ramion, a zatym można ten Troykąt zupełnie wyrachować.

*Uwaga.* Gdy narzędzie tak ieſt zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, któ-

reby od ſpodka wyſokości prowadzone były do dwóch konców Podſtawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wſzyſtkich tych trzech punktów odległość; wyiąwſzy, gdyby dwa końce podſtawy, były w iedney linii z ſpodkiem wyſokości. (l)

## PRZYDATEK II.

### Pierwſze początki równoważenia.

W pierwſzych początkach, na ktorych ſię równoważenie (libellatio) zaſadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Rożnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iey figurą (ſzpłaſzczoną w końcach Oſi) bardzo mało wpływa w działaniania, o których tu mówić ſię będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, popraw: z przyczyny nie zupełney ziemi okrągłości, byłyby teraz niewcześne i nad poięcie Uczniów.

264.

---

(l) *Gdyby nie było ſpoſobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych oſtatnich przyſtoſowaniach, tedy dla łatwieyſzego uczniow poięcia, można działania te na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.*

264 Uważaiąc Ziemię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwſzy ią płaſzczyzną przez środek iey przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem, którego promień byłby tenże ſam, co i promień ziemi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 ſtopniów, rachuiąc mil Niemieckich 15. (które ſię nie wiele różnią od Polſkich) na ieden ſtopień; cały ten okrąg zawierać w ſobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatym średnica iego, to ieſt średnica ziemi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc ogrągło: 1720.

Tę długość na mnieyſze miary Polſkie z Niemieckich zamieniaiąc (ſpoſobem w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziemi, więcey cokolwiek niż.

21000000, łokci Polſkich.

7000000, ſążni

2800000, prętów

280000, ſznurów.

365. Mowi ſię, że dwa mieyſca ſą do *równowagi* (ad libellam,) gdy równą maią od środka ziemi odległość. Y tak powierzchnia wody ſtoiącey, wſzyſtkie punkta ma do równowagi.

Gdy

Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt w punkcie powierzchni ziemi do iey promienia, przez ten punkt przechodzącego; ta liniia procz iednego tego punktu ſpolnego z promieniem. ktorego odległość od środka, rowna ſię prmieniowi ziemi, wſzyſtkie inne ſwoie punkta, dalſze mieć będzie w rzeczy ſamey od środka ziemi; ale że przy takiey wielkości promienia ziemi, rożnica położenia tey linii, okazuiącey *rownowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody ſtoiącey, ktora okazuie *rownowagę prawdziwą* (libella vera) ta mowię rożnica tak ieſt mała, że chyba w znaczney bardzo odległości da ſię poſtrzedz, przeto w zwyczaynieyſzych działaniach, można na tę rożnicę względu nie mieć, i rownowagę pozorną za rownowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 ſążni, rożnica ta nie dochodzi 1. cala.

*Fig.* 6. Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, liniia AB. niech wyraża ſtyczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża liniią, ciągnioną przez punt B, i przez środek ziemi, ſpotykaiącą iey powierzchnią w punktach: D. i d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$; aże liniia BD

ieſt

ieſt bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w ſobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyſzą od $\frac{1}{24}$. części łokcia, to ieſt mnieyſzą od cala.

Liniia tą BD ieſt prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatym w odległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyſzych od 900. łokci, będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyſzą od cala.

366. Lubo nierówności na powierzchni ziemi, ſą bardzo małe względem wielkości całey ziemi, a zatym można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele ſię przykładaią do odmian, które na ziemi poſtrzegamy. Gdyby nap: ziemia była Matematyczną kulą, to ieſt zupełnie okrągłą wody wſzyſtkie na iey powiezchni znayduiące ſię byłyby ſtoiącemi; nie byłoby ani rzek, ani ſtrumyków, ani zrodeł wytryſkuiących i ſztuką tylko możnaby wody z iednego mieyſca na inne ſprowadzać.

367. Przez działania równoważenia, wyznaczaią ſię te nierównośei, czyli różnica

żnica, która zachodzi między odległością od środka ziemi, dwoch, albo więcey punktów. Przeto dochodzenie iakieykolwiek wyſokości, możnaby ſobie wyſtawić pod ogulnym tym wyobrażeniem działań równoważenia; zwyczaynie iednak działania te daley ſię nie rozciągaią, iak do wyznaczenia pomnieyſzych wyſokości, a ſzczegulniey do ſprowadzenia wód z iednego mieyſca na drugie; co obſzerniey zwykło ſię wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane ſą niektóre narzedzia, ſłużące do wyznaczenia linii proſtey ukazuiącey równowagę pozorną. Tych wſzyſtkich narzędziów opiſanie, wieleby tu mieyſca zabrało, (m) wyrażą ſię iednak potrzebnieyſze.

368. Równowaga wodna, iedna z nayprościeyſzych, ſkłada ſię z rurki moſiężney

(m) *Dokładne i obſzerne opiſanie tych narzędziów, znayduie ſię w Kſiązce P. Pikarda o równoważeniu, która z wielą przydatkami wyłożona ieſt z Francuzkiego na Niemiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wiele także doczytać ſię można w kſiążce napiſaney w tey materyi przez P. Le Febure.*

żney, albo blaszaney, i z dwóch butelek szklannych iak nayprzezroczystszych, przy końcach teyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawarta przechodzi przez rurkę, i w równey w obydwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzana bywa taka rownowaga na nodze drewnianey, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tym się zasadza, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcey naczynia, przechodząca z iednego do drugiego, układa się do równowagi. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, tey tu opisaney równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, gołym okiem do powierzchni wody przystawionym, celuiemy do iakiego mieysca.

370. Układ równowagi powietrzney zasadza się na własności powietrza, ile lekszego od wody. Przez tę własność, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte, wychodzić nad wodę musi.

Jest to ieden z naylepszych sposobów do ustawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczey perspektywy do niego przyprawioney.

Równo-

Równowagi powietrzne do wielkiey doſkonałości można przyprowadzić, iako to, opiſuiąc równowagę Brandera, obſzernie wywodzi P. Lambert w przydatkach ſwoich do kſiążki Pikarda. Robią ieſzcze i równowagi próżne, to ieſt takie, z których powietrze ieſt wyciągnione.

Te równowagi za świadectwem X. Fontany, naymnieyſzą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykierowania linii, prawidła, lub perſpektywy, podług położenia poziemnego ſłuży też i nić, która przez ciężar w końcu iey zawieſzony do pionu ſię układa.

Ta nić ponieważ ieſt proſtopadłą do linii iakieykolwiek poziemney, na tey więc zaſadzie robić zwykli, innego ieſzcze gatunku równowagi, nazwane równowagami *Pikarda, Huyghenſa* i t. d.

372. Do działań równoważenia, potrzebny także ieſt pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada ſię znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący ſię poſuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma być cel wyrażony, któryby i z daleka rozeznać można.

373.

373. Niech będą dwa iakiekolwiek mieyſca, których różność równowagi trzeba znaleść.

Poſtawmy narzędzie na iednym z tych mieyſc, a na drugim pręt na łokcie, cale i t. d. podzielony. Perſpektywę poziemnie, czyli do równowagi uſtawioną kieruymy ku prętowi; do którego znak przyprawiony, ma być przez inną oſobę ſpuſzczany, lub podnoſzony poty, poki środek tego znaku nie przypadnie w linii proſtey, którą poziemne perſpektywy położenie wyznacza. Jeżeli wyſokość tego środka znaku, od ſpodka pręta rachowana, będzie równa wyſokości perſpektywy rachowaney od ſpodka nogi, na którey całe narzędzie z perſpektywą ieſt wſparte, tedy dwa te mieyſca będą do równowagi. Jeżeli zaś wyſokość środka znaku będzie więkſza, lub mnieyſza od wyſokości perſpektywy, tedy ſpodek pręta będzie tyle niżſzy lub wyżſzy od ſpodku nogi narzędzia, i ta ieſt różnica między temi dwiema wyſokościami.

Tego ſpoſobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcey na 200, ſążni.

W więkſzych odległościach, uchybienia byłyby znacznieyſze, tak z przyczyny zbo-

zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącey między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, a raczey one zmnieszyć, stawiaiąc narzędzie w równey, ile być może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mamy. Obydwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego średniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości środka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iedney względem drugiey, tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którym znak niżey iest położony.

Przez to dwoiakie działanie, można z iednego stanowiska równoważyć dwa iakie mieysca, których odległość zawierałaby nap. 300. sążni, a zatym iużby nadto wielka była, aby w niey pierwszego do równoważenia sposobu użyć godziło się.

375. Gdy mieysca do równoważenia wyznaczone, są ieszcze odlegleysze, nap.

na

na iednę, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywiękſzą odległość podzielić na części, z których każda zawierałaby około 300. ſążni; a dopiero z pośrodka każdey tey mnieyſzey odległości, równoważyć iey końce, czyli granice.

Przez pierwſze takowe działanie, znaydziemy różnicę pierwſzego punktu wyſokości od drugiego naſtępuiącego. Przez drugie działanie znaydziemy różnicę wyſokości tego drugiego punktu od trzeciego, y tak daley; aż na koniec znaydziemy rożnicę wyſokości przedoſtatniego punktu od oſtatniego, który kończy całą odległość, a tym ſamym doydziemy też y różnicy wyſokości pierwſzego punktu od oſtatniego, to ieſt doydziemy różnicy wyſokości między iednym i drugim końcem całey odległości.

376. Gdyby ſię zdarzyło, że poſtępuiąc od każdego punktu podziału, do innego iemu naybliżſzego, każdy taki punkt naſtępny byłby wyżſzy lub niżſzy od poprzedzaiącego, z którym ſię w równoważeniu porównywa, tedy ſumma różnic wyſokości między iednym i drugim punktem naſtępnym pokazałaby całą różnicę między wyſokością dwóch punktów

koń-

kończących całą odległość. Ale ieżeli te punkta następne, są na przemiany iedne wyższe, a drugie niższe względem tych, z któremi się przy każdym działaniu porównywaią, tedy wziąść trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym następnym działaniu są wyższe, od tych, z któremi ie porownywamy (postępuiąc zawsze od iednego końca całey odległości, do drugiego) Trzeba ieszcze wziąść i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym działaniu następnym są niższe od tych, z któremi się porownywaią (w tę samę stronę co y pierwey postępuią:)

Jeżeli te dwie summy będą równe, znakiem to będzie, że obadwa całey odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy bedą nie równe, tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mnieysza iest od drugiey.

377. Aby nie być obowiązanym porównywać przy każdym stanowisku, wysokości dwóch punktów przypadaiących do równoważenia, lepiey iest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku,

ku, i onę dla pamięci zapiſywać po każdym ſzczegulnym działaniu. Jedna z tych wyſokości naznaczonych, będzie ſłużyć do porównania iey z inną naſtępną, która ieſzcze nie ieſt znaleziona. Ci dway pomocnicy poſtępować będą po każdym ſzczegulnym działaniu, ku drugiemu końcowi całey odległości; ten, który wprzody poydzie, ſtanie przy naſtępuiącym punkcie podziału, a drugi ſtanie przy punkcie od pierwſzego opuſzczonym.

Po ſkończonych tych wſzyſtkich ſzczegulnych działaniach, zbierze ſię wraz ſumma wyſokości od pierwſzego pomocnika naznaczonych, i podobnie w iednę ſummę zbiorą ſię wyſokości naznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch ſumm, będzie różnicą wyſokości dwóch punktów ſkraynych, któreśmy równoważyć poſtanowili. Ten zaś punkt będzie wyżſzy od drugiego, któremu odpowiadaiąca ſumma będzie mnieyſza.

378. Co ſię tycze równoważenia mieyſc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak nap. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wyſokości mieyſc położonych przy brzegach Morza śrzodziemnego, od wyſokości mieyſc innych wśrzod Polſki położonych, albo przy brzegach morza Baltyckie-

tyckiego; rozumiem że pewnie o tym mowa będzie w Fizyce. Można w tey mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Luc. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącey ziemię (ſur les modifications de l'Atmoſphere.)

## ROZDZIAŁ XIII.

*O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Pawierzchni Koła.*

379. OBwody Wielokątów foremnych podobnych ſobie, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie koł w nie wpiſanych, lub na nich opiſanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równaią ſię Troykątom maiącym za wyſokość promienie koł wpiſanych, a za podſtawę obwod Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do ſiebie, tak ſię maią do ſiebie, iak kwadraty promieni kół wpiſanych i t. d. Wſzyſtkie te Twierdzenia nie zawiſły od liczby boków w Wielokątach, i zawſze ſą prawdziwe, chociażby naywiękſza była liczba boków.

380. Ztąd zdaie ſię, że prawdziwe będą te wſzyſtkie Twierdzenia, gdyby nawet liczba boków tak wielka była w

wie-

wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobna, i gdyby promienie kół wpiſanych i opiſanych różnicy między ſobą nie miały, ale iednym promieniem wydawały ſię. (n)

A a 381.

---

(n) *Takowe rozumowanie, przywiodło Geom trów, że do koła uważanego za granicę między wielokątem wpiſanym i opiſanym przyſtoſowali te Twierdz nia, które o wielokątach ſtanowili. Doſyć podobno będzie przy pierwſzym czytaniu tey kſiążki, wyſtawić uczniom koła, pod tą poſtacią. Jeżeli iednak przez ćwiczenia poprzedzaiące, ducha dokładności i ſmaku w niey nabyli, przeciwną rzeczą zapewne zdawać im ſię będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z naywiękſzą liczbą boków, do koła uważanego pod poſtacią wielokąta takiego, którego liczba boków więkſza byłaby od iakieykolwiek liczby naznaczoney. Poſtrzegą oni, i poſtrzedz powinni ſkok niezmierny w takowym przechodzeniu; gdyż ściśle mówiąc, linia krzywa nie może być uważana, iako zbior wielu linii proſtych bardzo małych, do ſiebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z więkſzą dokładnością wytłuſzczyć tak dla zabieżenia wielu trudnościom, które w tey mie-*

381. *Twierdzenie przybrane* Można zawſze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w ſzczegulności mnieyſza była, niżeli inna iakakolwiek ilość naznaczona.

*Dowodz.* Pomnożmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby ſię ſtała większą od pierwſzey ilości daney; na tyleż części równych podzielmy ilość pierwſzą, ile razy była pomnożona ilość druga; każda takowa część ilości pierwſzey, mnieyſza będzie od ilości drugiey naznaczoney.

W ſzczegulności mówiąc, gdy ſię weźmie połowa ilości iakiey ſkończoney, i tey połowy połowa, to ieſt czwarta część całey ilości, i znowu tey oſtatniey połowy połowa, to ieſt oſma część całey ilości, daley połowa tey oſmey części, to ieſt: część ſzeſnaſta i t. d. doydzie ſię na oſtatek do takiey części, która mniey-

---

*rze zarzucać zwykli nie którzy o świetle rozumu ſwego i przeniknieniu nadto uprzedzeni, a ledwie w rzeczy ſamey pierwſze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawienia młodzi zawczaſu w dokładność Matematyczną.*

mnieyſzą będzie od wſzelkiey ilości naznaczoney. (o)

382. *Twierdzenie.* 1. Można opiſać na kole danym, i wpiſać weń foremne dwa takie wielokąty podobne, aby ſtoſunek ich obwodów przybliżał ſię bardziey, do ſtoſunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtoſunek nierówności naznaczony.

*Przykład.* Można wpiſać w koło i na nim opiſać dwa wielokąty foremne podobne, takie, którychby rożnica obwodów mnieyſza była od dzieſiątey naprzykład części obwodu, iednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dzieſięć części równych, i niech AB iednę taką część wyraża. *Tab. XXII. Fig. 1.*

Przez B przeciągniymy DBd. proſtopadłą do promienia, i ſpotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16 i t. d. części równych, poty, poki nie doydziemy do czę-



---

(o) *Przeſtrzegać będą Nauczyciele Uczniów, aby zamiaſt ſłowa:* naznaczona, *nie używali tego drugiego ſłowa* naznaczyć ſię mogąca, *i dadzą im poznać rożnicę tych dwóch wyrazów.*

ści koła mnieyſzey od łuku DAd. Niechby naprzykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyſzych od łuku DAd; i punkt A niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (która będzie proſtopadłą do AC) Przez punkt A niech przechodzi ſtyczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, ſchodzą ſię z tą ſtyczną w punktach F,f. Liniie Ee, Ff, ſą bokami dwóch wielokątów foremnych podobnych, iednego w koło wpiſanego, a drugiego na kole opiſanego; a zatym obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodow tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak liniia AG, do linii CA. Ażе liniia AG mnieyſza ieſt od linii AB, to ieſt od dzieſiątey części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyſza będzie, niżeli dzieſiąta część obwodu wielokąta na kole opiſanego.

Gdyby liniia AB była $\frac{1}{10}$. linii BC, albo $\frac{1}{10}$. linii AC, możnaby podobnym ſpoſobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak ſię ma do obwodu wielokąta w koło wpiſanego, iak liniia AG do linii CG. Ażе AG. mnieyſza ieſt od AB, więc

więc tym samym mnieyſza ieſt od $\frac{1}{10}$ tey części linii BC, a tym bardziey mnieyſza będzie od 10tey części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyſza byłaby od 10tey części obwodu wielokąta w koło wpiſanego. (p)

383. *Wnioſek 1.* Można w koło wpiſać wielokąt ieden foremny. i drugi podobny na nim opiſać, tak; aby ſtoſunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wielokątów bardziey był przybliżony do ſtoſunku równości, niżeli iakikolwiek inny ſtoſunek naznaczony.

*Przykład.* Niechby opiſany na kole był ieden wielokąt, a drugi podobny w koło wpiſany, i niechby różnica ich obwodów mnieyſza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpiſanego.

Rożni-

---

(p) *Daie ſię tu przykład liczebny dla łatwieyſzego poięcia. Że iednak te rozumowania uważane w ſobie nie zawiſły od tych liczb, i mogą być przyſtoſowane do wſzyſtkich innych; przeto dowodzenie naſze nie ieſt dla tego ſzczegulnego przyſtoſowania, ani mniey dokładnym, ani mniey ogulnym.*

Różnica obwodu wielokąta opisanego, od obwodu koła mnieysza będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; to iest mnieysza niżeli $\frac{1}{20}$ część obudwu wielokąta wpisanego, a tym bardziey mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła

Rożnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieysza iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatym mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopieroż mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią prostą, wziętą za rowną okrągowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieysza byłaby, niżeli liniia dana iakieykolwiek małości.

Pomnożmy ostatnią tę liniią tylerazy, aż większą będzie od linii wziętey za równą okrągowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększona była ta liniia. Wpiszmy w koło i opiszmy na nim dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mnieysza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednego z nich. Będzie zatym

tym różnica obwodu koła od obwodu którego kolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyſza niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednego z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpiſanego; a dopieroż mnieyſza niżeli $\frac{1}{15}$. ta część okręgu koła, a ieſzcze mnieyſza, niż liniia dana wyznaczoney małości.

385. *Twierdz.* 2. Okrągi kół tak ſię maią do ſiebie, iak ich promienie.

Niech będą dwa koła C y c, a tych okrągi O y o, promienie zaś P y p; będzie zatym O : o = P : p.

Gdyby ta proporcya w czym chybiała, tedy pierwſzy ſtoſunek byłby więkſzy lub mnieyſzy od drugiego. W pierwſzym razie trzebaby powiękſzyć okrąg o, a w drugim okrąg O. aby naprawić proporcyą; a zatym w obydwóch razach trzeba powiękſzyć ieden z okrągów dla zrobienia proporcyi.

Niechby liniia proſta L, więkſza była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobna) L : o = P : p.

Opiſzmy na kole C wielokąt foremny, któregoby różnica obwodu, od obwodu koła,

koła, mnieyſza była, niżeli różnica L od O. Na drugim także kolę c, opiſzmy wielokąt foremny podobny pierwſzemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak ſię mieć będą do ſiebie, iak promienie P y p, kół C y c; albo iak L do o, (ponieważ miało być L : o = P, p.) Aże obwód pierwſzego wielokąta, mnieyſzy ieſt niżeli L, więc i obwod drugiego, mnieyſzyby być powinien niżeli o, to ieſt mnieyſzy niżeli okrąg koła, na którym ieſt opiſany, co być nie może.

Więc ſtoſunek promieni dwóch kół, nie ieſt większy ani mnieyſzy od ſtoſunku ich okrągów, a zatym równy ieſt temuż ſtoſunkowi.

386. *Wnioſek* 1. Idzie zatym, że ſtoſunek okrągu koła iednego, do ſwego promienia, tenże ſam ieſt, co i ſtoſunek którégokolwiek innego koła, do ſwego także promienia.

Przeto gdyby można znaleść ſtoſunek iakiegokolwiek koła, do iego promienia, iuż tym ſamym byłby znaleziony ſtoſunek każdego innego koła do ſwego promienia.

387. *Wnioſek* 2. Dwa proſtokątne Troykąty ſą do ſiebie podobne. Gdy mają

ią za wysokości, promienie dwóch kół, a za podstawy linie wzięte za równe okrągom tychże kół; a zatym takie dwa Troykąty będą do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promieni dwóch kol,

388. *Twierdz.* 3. Powierzchnia koła równa się powiarzchni Troykąta, maiącego za wysokość promień tego koła, a za postawę, iego okrąg.

*Dowodz.* Gdyby ten Troykąt, nie był równy powierzchni koła, byłby od niey większy, albo mnieyszy, a zatym koło byłoby równe innemu Troykątowi teyże samey wysokości, za podstawę zaśmaiącemu liniią większą, albo mnieyszą od okrągu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O, a tę liniią większą albo mnieyszą od okrągu, nazwiymy L.

W pierwszym razie, w którym ta liniia L, większa byłaby od okrągu koła, opiszmy na nim wielokąt foremny, którego obwod mnieyby się różnił od okrągu koła, niżeli się różni od niego liniia L; a zatym liniia L, większaby była od obwodu wielokąta. Powierzchnia tego wielokąta

byłaby

byłaby mnieyſza od powierzchni Troykąta maiącego za wyſokość, promień koła, a za podſtawę, liniią L, to ieſt byłaby taż powierzchnia wielokąta, mnieyſza od powierzchni koła, na którym wielokąt ieſt opiſany; co być niemoże.

W drugim razie, w którym liniia L, mnieyſza byłaby, od okrągu koła, wpiſzmy w koło wielokąt foremny, którego obwod mnieyby ſię różnił od okrągu koła, niżeli liniia L. a zatym obwod wielokąta byłby większy od linii L. Wpiſzmy w to ſamo koło wielokąt inny foremny, tyle dwoie co pierwſzy boków zawieraiący.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta, równałaby ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień koła, a za podſtawę obwòd pierwſzego wielokąta; (268) to ieſt liniią większą od L.

A zatym powierzchnia tego wielokąta wpiſanego w koło. większa byłaby niżeli powierzchnia koła, co być także nie może.

Więc powierzchnia koła, ani ieſt większa, ani mnieyſza od powierzchni Troykąta maiącego za wyſokość promień

tego

tego koła, a za poſtawę iego okrąg; a zatym równa ieſt powierzchni tego Troykąta.

389. *Wnioſek* 1. Powierzchnie kół ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym ich promieni, albo średnić; przeto gdyby promienie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wnioſek* 2. Powierzchnia koła, tak ſię ma do powierzchni wielokąta na nim opiſanego, iak okrąg koła, do obwodu wielokąta. A w ſzczegulnośći powierzchnia koła, tak ſię ma do powierzchni kwadratu na nim opiſanego, albo, co na iedno wychodzi, do kwadratu średnicy, iak ſię ma okrąg koła, do obwodu tego kwadratu; to ieſt, iak ſię ma okrąg koła, do ſwoiey średnicy cztery razy wziętey, czyli do linii tak długiey, iak cztery średnice.

Ztąd porownanie dokładne powierzchni koła, z powierzchnią kwadratu, a za tym i porownanie koła z powierzchnią iakiey-kolwiek figury proſtokreślney, zawiſło od porównania okręgu koła z liniią iaką proſtą, albo (co na iedno wychodzi) *kwadrowanie* koła, zawiſło od *wyproſtowania* iego okragu, czyli od wynalezienia linii proſtey równey okrągowey koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżey podawały, do zrobienia kwadratu równego summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększenia lub zmnieyszenia kwadratu w danym stosunku, mogą być równiey do kol przystosowane, czyniąc na ich promieniach lub średnicach, te same działania, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na któych podobne odmiany czynić przypadałoby.

A wszczegulności, chcąc podzielić powierzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrodkowe* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień iego na tyleż części równych, zacząwszy od środka, tak, aby odległości punktow podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1,2,3,4,5, i t. d. Niechby nap. przypadało podzielić koło na 7. częśei równych przez koła społśrzodkowe. Podzielmy promień na 7. części równych; średnie Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami kol, społ środkowych, przez które podzielona będzie powierz-

wierzchnia koła danego, na 7. części równych.

392. Wyznaczenie powierzchni wycinków, i odcinków kół, zawiſło także od wyznaczenia okręgu koła. Jakoż w ſamey rzeczy,

1. Powierzchnia wycinka tak ſię ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy, iak ſię ma łuk wycinka, do okręgu koła; to ieſt iak ſię ma Troykąt, którego wyſokością ieſt promień, a podſtawą, ten łuk, do Troykąta maiącego za wyſokość tenże promień, a za podſtawę okrąg koła. Aże ten oſtatni Troykąt byłby równy powierzchni koła, więc i pierwſzy Troykąt równy ieſt powierzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyſzy od pół koła, ieſt rożnicą między wycinkiem maiącym tenże ſam łuk, co i odcinek, i między Troykątem równoramiennym maiącym ſpolną z wycinkiem podſtawę wierzchołek, zaś w środku koła.

Aże powierzchnia wycinka, równa ſię Troykątowi maiącemu za wyſokość promień, a za podſtawę łuk wycinka; a powierzchnia Troykąta o którym mowa (wziąwſzy w nim za podſtawę, ieden z

ſpro-

promieni to iest z ramion iego, aza wysokość wstawę łuku należącego do wycinka) równa się Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powierzchnia odcinka mnieyszego od połkola równać się będzie Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia wyraża się rozmnożeniem liczby oznaczaiącey połowę promienia, przez inną liczbę oznaczaiącą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powierzchnia odcinka większego od połkola, iest summą z wycinka zawieraiącego między swemi ramionami ten sam łuk większy od połkola, i z Troykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiem pierwszym okrąg cały; a zatym powierzchnia tego odcinka, równa się Troykątowi maiącemu za wysokośc promień, a za podstawę, summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniem iest pierwszego łuku do całego okrągu, albo, (co na iedno wychodzi) z wstawy różnicy między łukiem odcinka, i półokrągiem.

393. *Definic:* W kołach nieiednakowego promienia, wycinki i odcinki podobne, te

te ſą, których łuki ſą do ſiebie podobne, to ieſt równą ſtopniów liczbę w ſobie zamykaią; a te łuki tak ſię maią do ſiebie, iak całe okrągi, a zatym iak promienie tychże kół.

394. *Twierdz.* 4. Wycinki i odcinki podobne w kołach nie iednakowego promienia, tak ſię maią do ſiebie, iak koła, do których należą.

*Fig.* 2.

1. Niech będą dwa wycinki podobne ABCDA, abcda, te dwa wycinki ſą do ſiebie iak koła, do których należą.

*Dowodz.* Wycinek ACBDA, tak ſię ma do koła, do którego należy, iak łuk ADB, do okrągu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okrąku adbda, to ieſt, iak wycinek acbda, do koła, do którego należy. Więc te dwa wycinki ſą do ſiebie iak koła, do których należą, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym promieni tychże kół.

2. Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobne, te dwa odcinki tak ſię maią do ſiebie, iak koła, do których należą.

*Dowodz.* Wycinki ACBDA, acbda, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym

nym promieni CA, ca, to ieſt iak $CA^2$. do $ca^2$. Troykąty podobne: ACBA, acba, w tymże ſamym ieden do drugiego ſą ſtoſunku; więc te dwa wycinki też ſam do ſiebie maią ſtoſunek, co i te dwa Troykąty. Więc różnica (albo ſumma) pierwſzego wycinka, i pierwſzego Troykąta, to ieſt odcinek ABDA, tak ſię ma do różnicy (albo do ſummy) drugiego wycinka i drugiego Troykąta, to ieſt do odcinka abda, iak ſię ma pierwſzy wycinek do drugiego: to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym promieni koł, do których te odcinki należą.

395. *Defin.* Niech będą dwa koła ſpołśrodkowe, mieyſce zawarte między ich okręgami, nazywa ſię Koroną.

396. *Twierdz.* 5. Powierzchnia iedney takiey korony równa ieſt proſtokątowi maiącemu wyſokość równą ſzerokości tey korony, a podſtawę równą okręgowi koła, którego promień równałby ſię połowie ſummy promieni okręgów dwoch koronę tę zawieraiących.

Fig. 3. Niech będą CA, CB, promienie dwóch koł ſpołśrodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F. linia CF, będzie połową ſummy dwóch promieni CA,

CB

CB należących do dwóch koł ſpołśrodkowych; korona zawarta między temi kołami. równa ieſt proſtokątowi maiącemu ſzerokość AB tey korony za wyſokość, a za podſtawę okrąg, którego, liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD proſtopadłą do AC, i daymy, że AD równa ſię okręgowi, którego promieniem ieſt CA. Złączmy punkta C, i D, liniią CD, a przez punkta B i F. pociągniymy dwie linije rownoodległe od AD, aż do ich ſpotkania ſię z liniią CD, w punktach E, i G.

Ponieważ CA : CB = AD : BE

i CA : CB = okrąg: CA: okręguCB.

więc - AD : BE = okrąg CA: okręguCB.

Aże AD wzięta ieſt za liniią równą okręgowi, którego CA ieſt promieniem, więc i BE = okręgowi CB.

Podobnym ſpoſobem dowieść można, że linia FG, równa ieſt okręgowi, którego promieniem byłaby liniia CF.

Powierzchnie koł, których promieniami ſą CA, i CB, równaią ſię Troykątom, CAD, i CBE, a zatym powierzchnia ko-

rony równa będzie czworokątywi ABED. Przez G poprowadźmy równoodległą od AB, któraby ſpotkała AD w H, a BE w J; Troykąty proſtokątne GDH, GEJ, maią boki GH. GJ, równe, i kąty równe, więc mogą przyſtać do ſiebie; a zatym ſumma z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GEI, to ieſt Proſtokąt ABIH równa ſię ſummie z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GDH, to ieſt, równa ſię czworokątowi BEDA. Aże ten czworokąt równy ieſt powierzchni korony, więc taż korona równa będzie proſtokątowi ABIH, to ieſt proſtokątowi, który ma ſzerokość korony za wyſokość, a za podſtawę, okrąg w którym, promieniem ieſt średnia arytmetycznie proporcyonalna, między dwoma promieniami, czyli połowa ſummy tychże dwoch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach ſpołśrodkowych, wycinków dwoch, zawartych między temiż ſamemi promieniami, równa ſię Proſtokątowi maiącemu za wyſokość różnicę dwóch promieni, a za podſtawę łuk podobny łukom wycinków dwoch danych, i należący do okrągu, którego promień, ieſt średnim arytmetycznym między promieniami tych dwoch wycinków.

1. Poka-

1. Pokazawſzy, iż zkwadrowanie koła, lub części iego, zawiſło od wyproſtowania iego okrągu; przyſtąpmy do ſzukania tego ſproſtowania.

Zadanie to aż nazbyt wſławione, zatrudniło wielu przypiſuiących ſobie nazwiſko Geometrow, którym ledwie początki Matematyki były znaiome, a i zadania nawet ſamego nierozumieli W czym było omylne ich rozumienie, bawić ſię nad tym, nie ſądzę być rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obſzernieyſzą w tey mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Hiſtoryi o dochodzeniu kwadrowania koła* (Hiſtoire des recherches ſur la quadrature du Cercle:) Doſyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tym zawiſła, aby wynaleść liniią proſtą równą okrągowi koła podanego. Nie rozumi ſię tu zaś rowność pozorna, i zmyſłowa (iak ci mniemaią, ktorzy koło zdrewna lub z kruſzca wyrobione tocząc po iakiey płaſzczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo którzy koło iakie nicią okręcaią, i biorą potym długość tey nici; albo na koniec, którzy ważą takowe koło, i one porównywaią z kwadratem podobney materyi, i iednakowey z kołem grubości:) ale ſię rozumie

 rów-

równość umyſłowa, czyli taka, o którey możnaby ſię przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, iakich używaliśmy do dowiedzenia prawd, w tym przeciągu dzieła, wyłuſzczonych.

398. Archimedes trzyſta lat bliſko przed Narodzeniem Chryſtuſa znalazł ſtoſunek okręgu do średnicy, tak bliſki prawdziwemu, że we zwyczaynych zdarzeniach ieſt doſtatecznym, a przytym, i w używaniu wygodnym. Doſzedł on, że oznaczywſzy średnicę koła przez 1. Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$. a mnieyſzy niż $3\frac{1}{70}$: albo, że wyraziwſzy długość średnicy przez 497. okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyſzy niż 1562; uchybienie zatym byłoby naywięcey w części $\frac{1}{156}$ całego okrąga; a któregókolwiek ze dwóch ſtoſunków używſzy, nap oſtatniego, ten wypadłby na ſtoſunek 7 do 22.

Poźniey po Arhimedeſie, wynaleziono ſpoſoby krótſze, któremi dochodzi ſię ſtoſunków bardziey ieſzcze zbliżonych do prawdziwych. Do tey nawet dokładności iuż przyſzło, że wyraziwſzy średnicę koła przez 1, z zerami 127 przydanemi, wynaydzie ſię okrąg w liczbie złożo-

ney

ney z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniem mnieyszym od iedności ostatniego, a naymniey wyrażaiącego znaku teyże liczby. Sposob iednak dochodzenia z tą dokładnością ważności okragu koła, nie może być w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczemy iednak stosunki niektóre wygodnieysze średnicy koła do okragu, wyięte z Kśięgi sławnego P. Huyghens o wynalazkach wielkości koła (de circuli magnitudine inventa). Używaiąc Dwonasto kąta wpisanego w koło, i na kole opisanego, można wynaleść dokładnieysze stosunki średnicy koła do okrągu, niżeli te których doszedł Archimedes przez wielokąty o 96 bokach, wpisane w koło, i na nim opisane; ale na to mieysce rachunek Archimedesa mniey wyciaga poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stosunki średnicy do okrągu koła przybliżone do prawdziwych, są następuiące.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | do | 22. |
| 100 | do | 314. |
| 106 | do | 333. |
| 113 | do | 355. (q) |

Ponie-

(q) *Napisawszy trzy pierwsze niepa*

Ponieważ ſtoſunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy iego, ten ſam ieſt, co ſtoſunek okrągu koła do średnicy cztery razy wziętey; więc ſtoſunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą naſtępuiące.

22 do 28, albo, 11, do 14.

314 do 400, albo 157, do 200.

333 do 424.

355 do 452.

Czyniąc przybliżenia dokładnieyſze, lecz bardziey zawiłe, i używaiąc ſpoſobów, krotſzych, ale początkowe wiadomosci przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiera w ſobie średnicę, razy 3,141592653$\frac{5}{6}\pm$

Zkąd wynika ſtoſunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo ſtoſunek okrągu

---

*rzyſte liczby* 1. 3. 5. *podwa razy, iednę przydrugiey, tak:* 113355 *liczba* 113, *zawieraiąca trzy pierwſze znaki, wyrażać będzie średnicę; liczba zaś* 355. *zawieraiąca trzy oſtatnie znaki, wyrazi z małym uchybieniem okrąg koła.*

okrągu koła do średnicy iego, cztery razy wzięty, równy ſtoſunkowi 3.14592653$\frac{5}{6}$ ± do 4, albo 3141592653$\frac{5}{6}$ ± do 40000000000.

Z czterech powyżey wyrażonych ſtoſunków średnicy do okrągu koła; pierwſzy daie okrąg koła większy razy

| | |
|---|---|
| | 3,1428 + od średnicy, |
| drugi | 3,1400. |
| trzeci | 3,141509, + |
| czwarty | 3,14152992 + |

Widziemy tu, iż ſtoſunek pierwſzy, daie okrąg koła nad to wielki, drugi i trzeci daie ten okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nad to wielki; trzeci iednak i czwarty ſtoſunek dokładnieyſzy ieſt od dwóch pierwſzych, a zwłaſzcza czwarty, który ieſzcze w milionowych cząſtkach daie okrąg koła nie rożniący ſię od ważności iego wyżey podaney (r) a iak naysciśley wyrachowaney.

400

---

(r) *W drugiey Kſiędze* Pamiętników (*Memoires*) *Matematycznych P. Lamberta, znayduie ſię wyborna* Roſprawa (Diſſertatio) o *kwadrowaniu koła. Do-*

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżenie, następuiące zagadnienia.

1. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego okrąg.
2. Maiąc dany okrąg koła, znaleść iego średnicę.
3. Maiąc daną średnicę koła, znaleść iego powierzchnią.
4. Maiąc daną powierzchnią koła, znaleść iego średnicę.
5. Znaleść bok kwadratu równego kołu danemu.

Znayduiemy, iż stosunek średnicy koła do boku kwadratu równego temu kołu, iest, 200000, do 177245/6 †.

Ten stosunek przybliża się bardzo do stosunkow następuiących. - -

| | | |
|---|---|---|
| 35 | do | 31. |
| 44 | do | 39. |
| 123 | do | 109. |
| 157 | do | 148. |

Ma-

---

*wodzi tam (§9) Autor, że ieżeli można by wyznaczyć stosunek dokładny, okrągu koła do średnicy iego, tedy liczby, któreby go wyrażały, większeby być powinny od następuiących, które ten stosunek przybliżony wyrażaią to iest:* 101951·4486099146. do 324 521 540 032 945·

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową tego łuku, (to ieſt w ſtopniach) znaleść długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleść odcinek między tym łukiem i cięciwą iego.

Nayłatwiey i nayprościey rozwiążemy to oſtatnie zagadnienie, gdy w Troykącie, który ieſt różnicą między wycinkiem i odcinkiem wſpieraiącym ſię na tymże ſamym łuku, weźmiemy za podſtawę ieden z promieni, a za wyſokość wſtawę łuku danego: maiąc albowiem tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak ſię ma do powierzchni odcinka (mnieyſzego od połkola) jak ſię ma okrąg cały do rożnicy między łukiem odcinka, i wſtawą tego koła; i ułożywſzy ſobie tablicę łuków koła, podług promienia tablic Trygonometrycznych, łatwo przyidzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8.

---

(s) *Co ſię tycze ſpoſobu ułożenia takowych tablic. obacz przykłady dane w Arytmetyce.*

8. Znaleść przez przybliżenie wazrość kątową łuku równaiącego ſię promieniowi koła.

Przyſtoſowanie tego zagadnienia częſto bywa używane w wyżſzych częsciach Matematyki.



Tab. I.

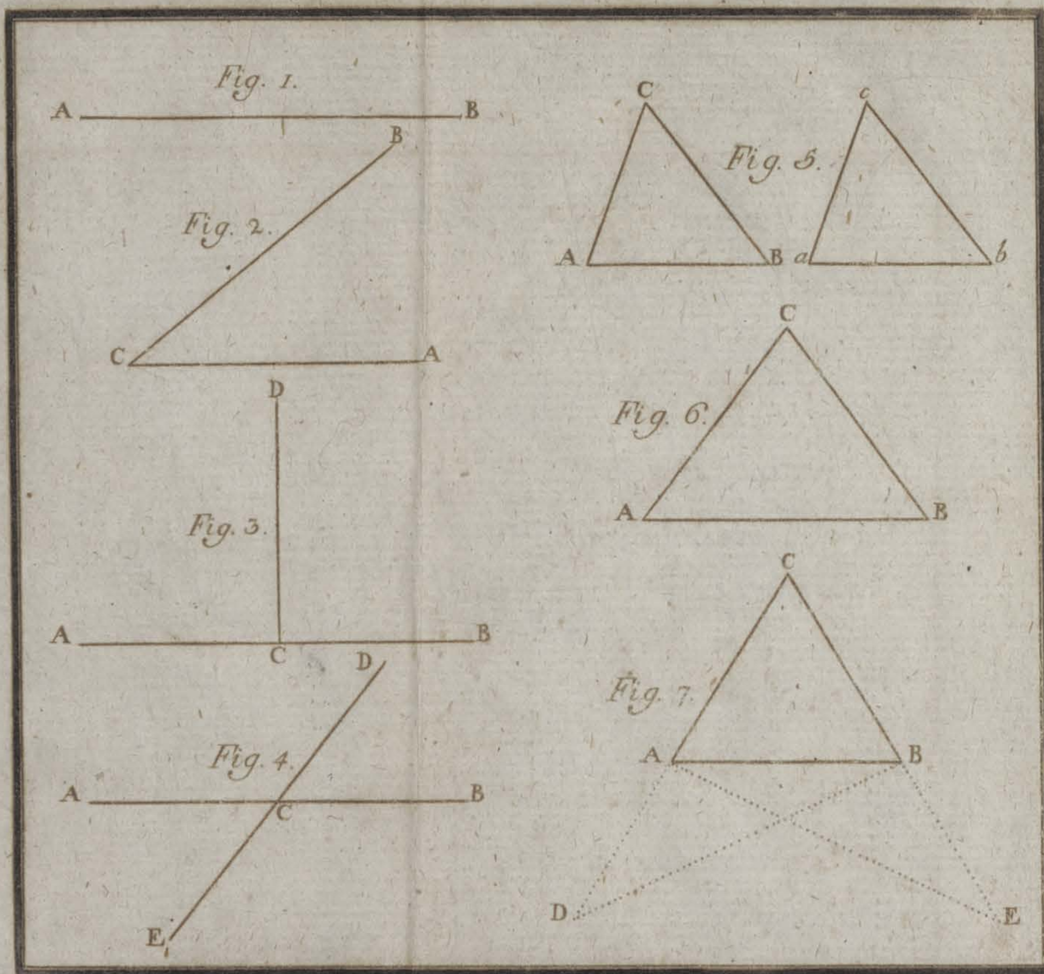
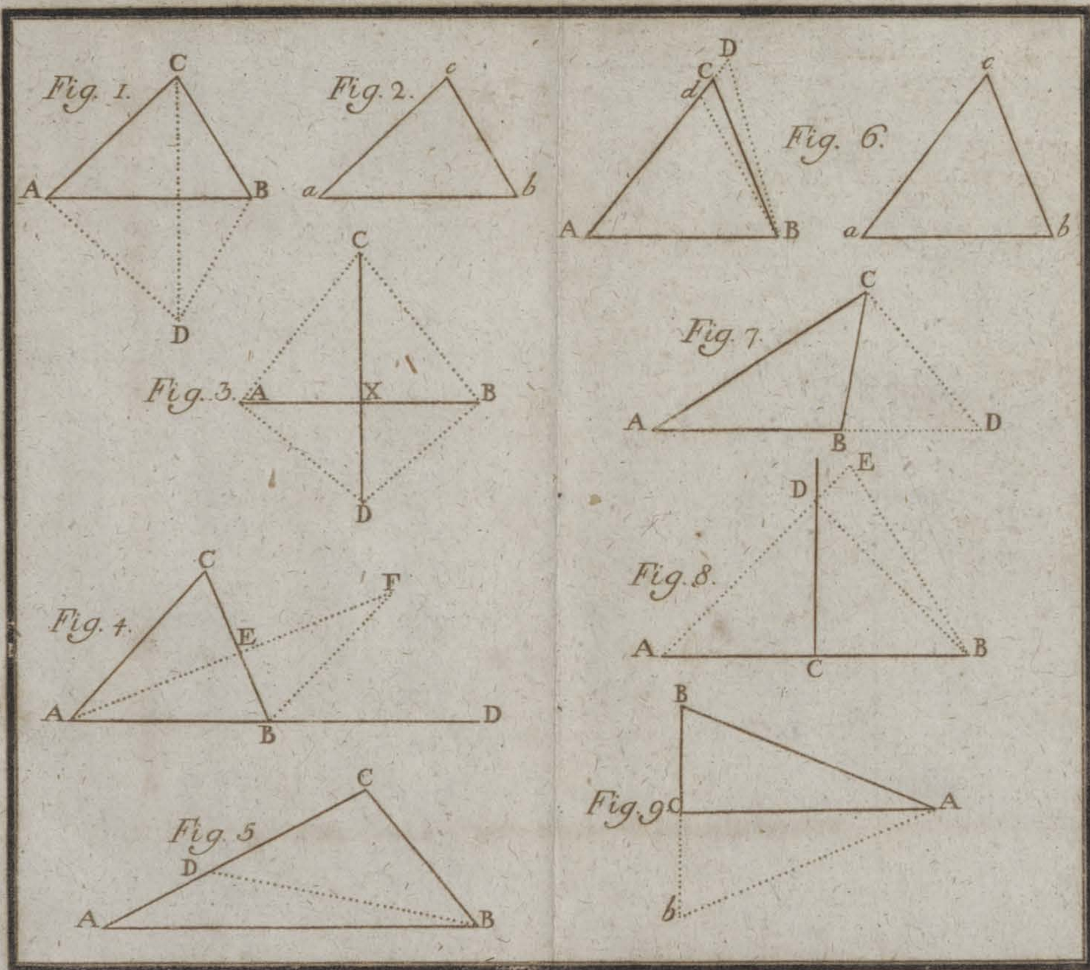
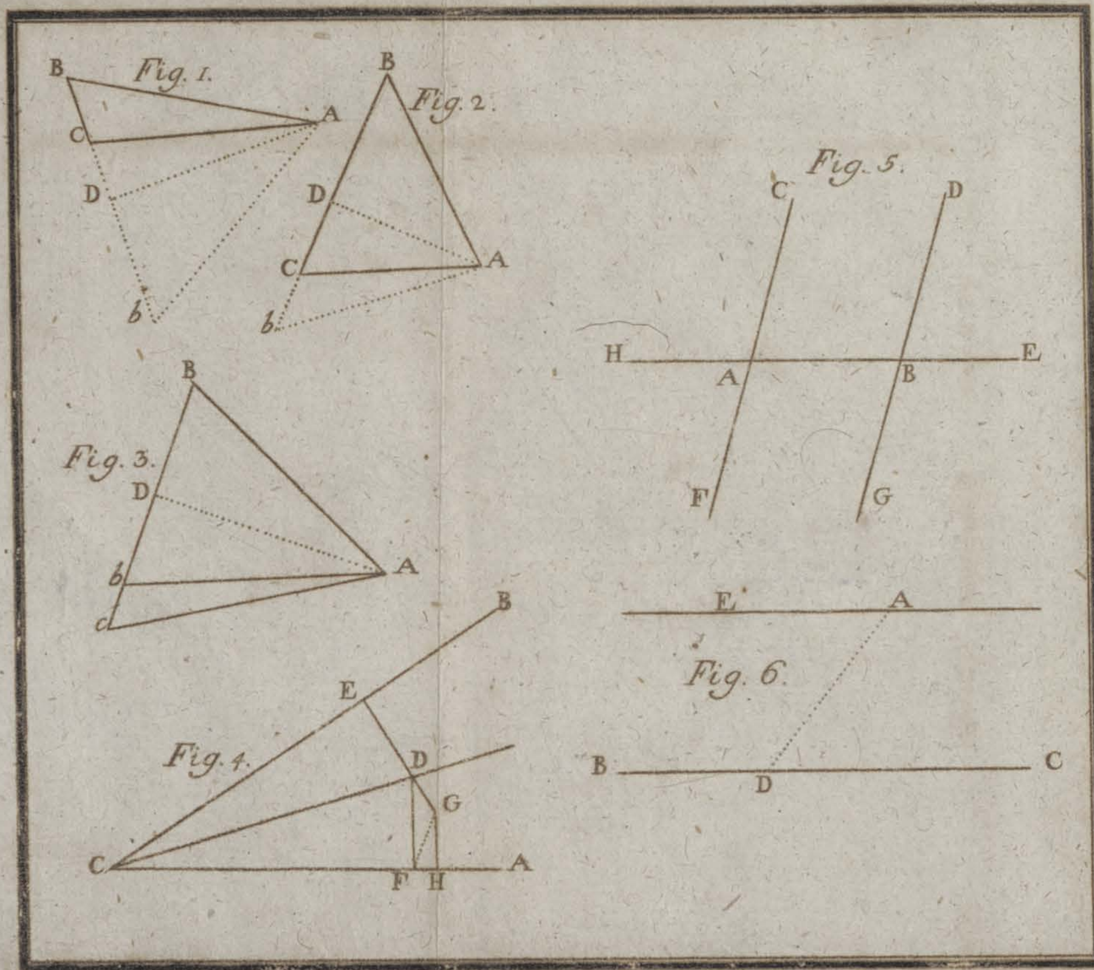


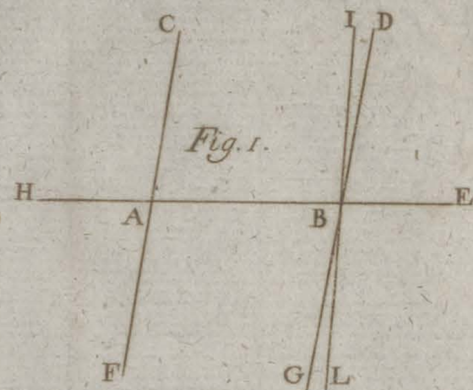
Fig. 1.
A
B
B
Fig. 2.
C
A
D
Fig. 3.
A
C
B
D
Fig. 4.
A
C
B
E
C
c
Fig. 5.
A
B
a
b
C
Fig. 6.
A
B
C
Fig. 7.
A
B
D
E

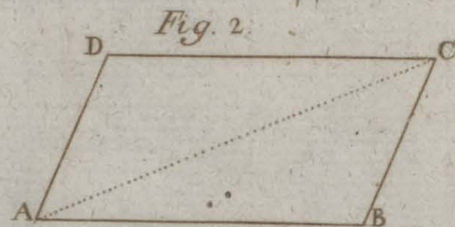
Tab. II.

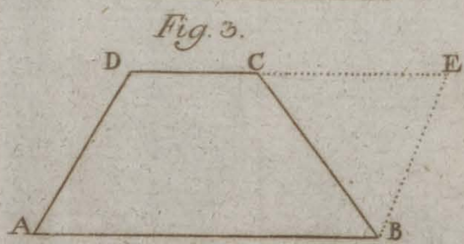

Fig. 1.
C
A
B
D
Fig. 2.
c
a
b
Fig. 3.
C
A
X
B
D
Fig. 4.
C
F
E
A
B
D
Fig. 5
C
D
A
B
Fig. 6.
D
C
d
A
B
c
a
b
Fig. 7.
C
A
B
D
Fig. 8.
E
D
A
C
B
Fig. 9
B
C
A
b


Fig. 1.
B
A
C
D
b
Fig. 2.
B
D
C
A
b
Fig. 3.
B
D
b
A
c
Fig. 4.
B
E
D
G
C
F
H
A
Fig. 5.
C
D
H
A
B
E
F
G
Fig. 6.
E
A
B
D
C

Tab. IV.

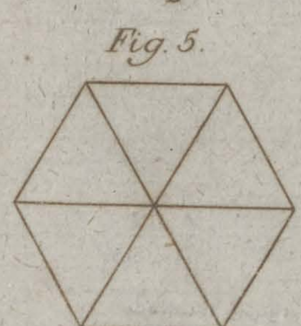


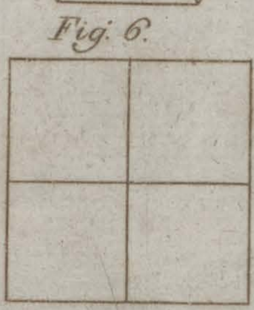



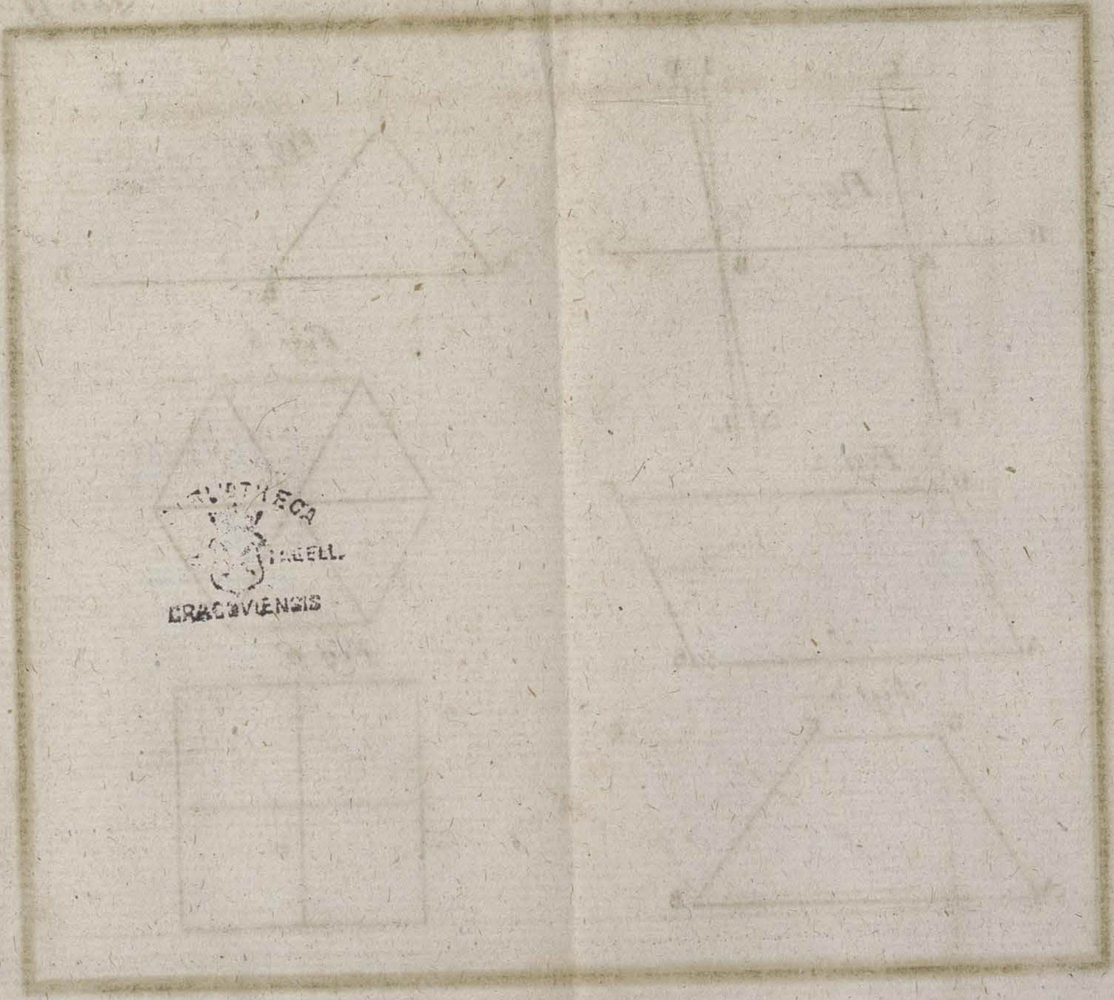





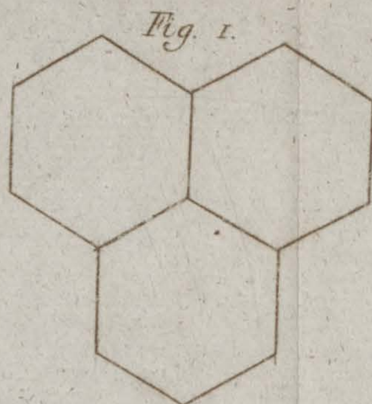





JAGELL.
CRACOVIENSIS

Tab. V.


Fig. 1.

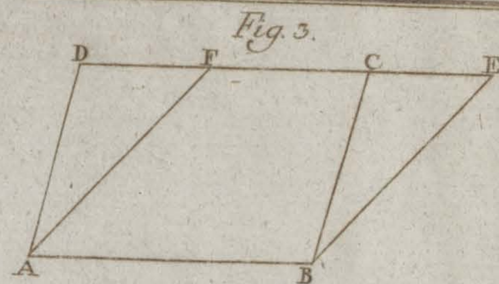


Fig. 3.

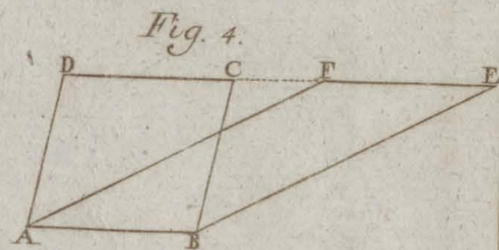


Fig. 4.

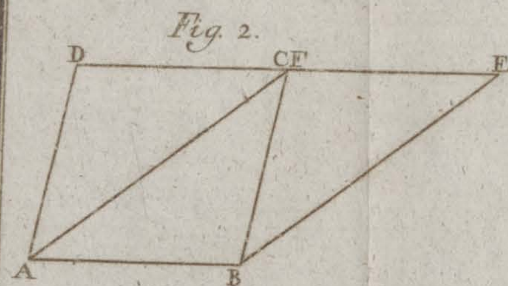


Fig. 2.

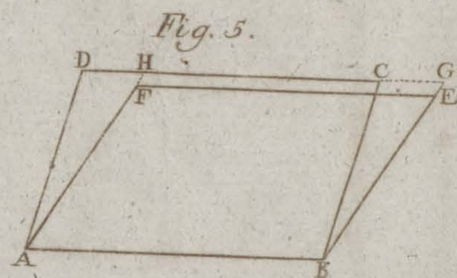
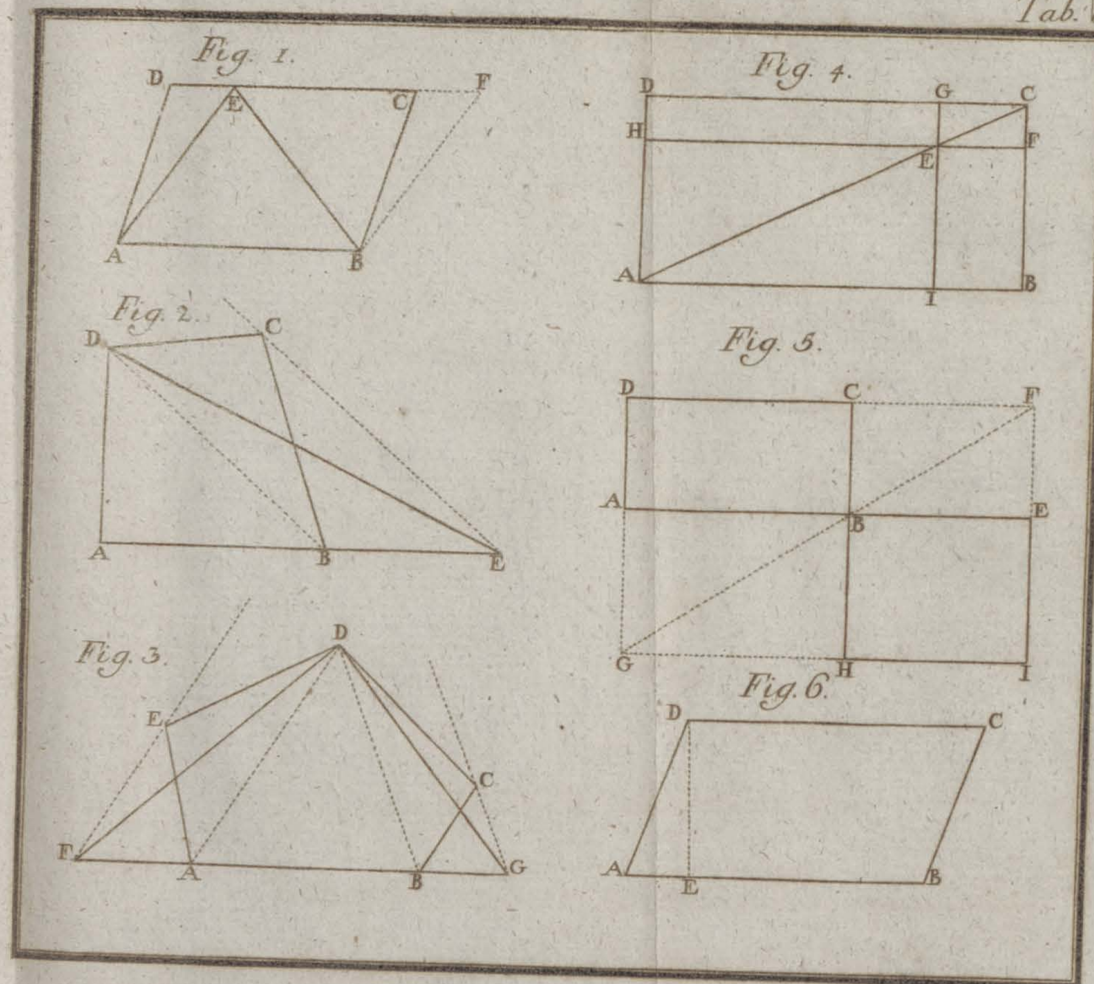
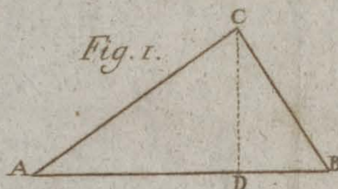
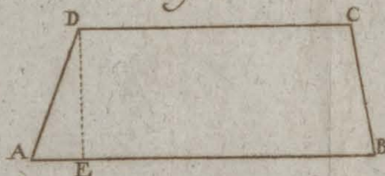
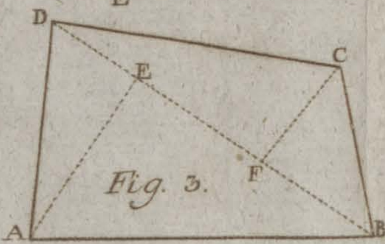


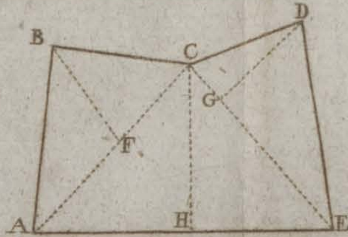
Fig. 5.

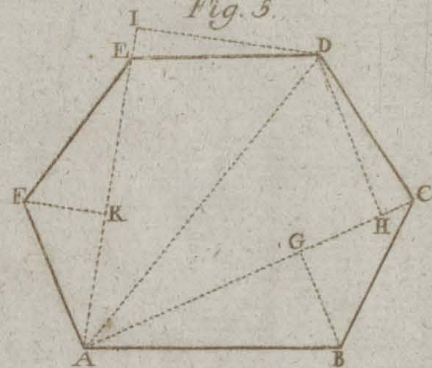

Tab. VI.
Fig. 1.
D
E
C
F
A
B
Fig. 2.
D
C
A
B
E
Fig. 3.
D
E
C
F
A
B
G
Fig. 4.
D
G
C
H
F
E
A
I
B
Fig. 5.
D
C
F
A
B
E
G
H
I
Fig. 6.
D
C
A
E
B

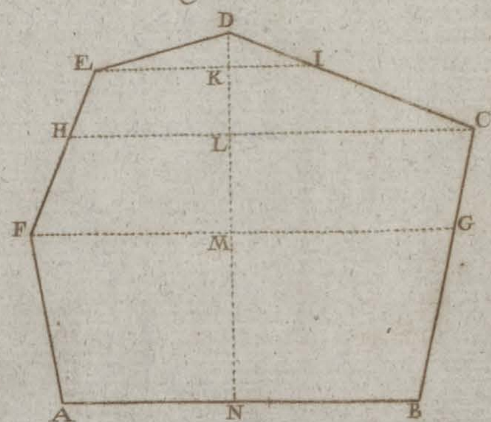

Fig. 1.
C
A
D
B


Fig. 2.
D
C
A
E
B


D
E
C
F
Fig. 3.
A
B


B
C
D
Fig. 4.
G
F
A
H
E


Fig. 5.
I
E
D
F
K
C
H
G
A
B


Fig. 6.
D
E
K
I
H
L
C
F
M
G
A
N
B

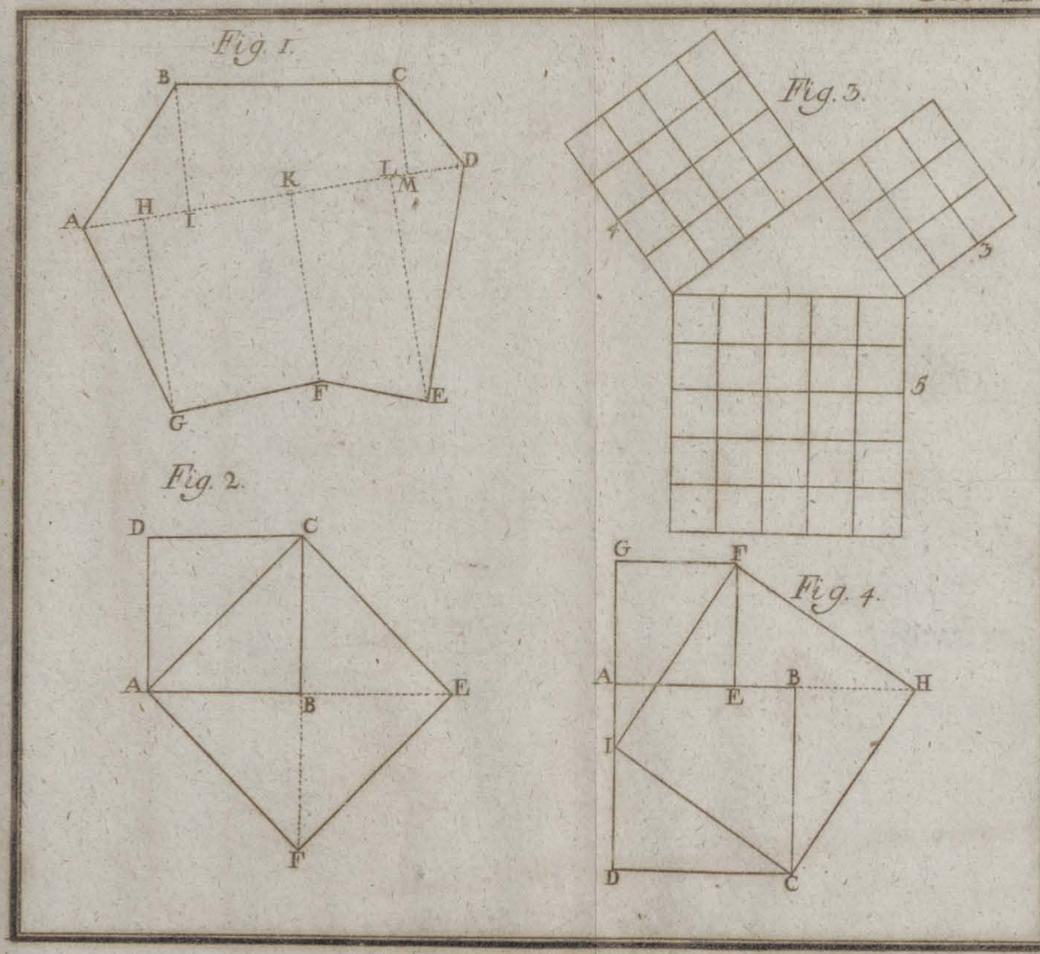
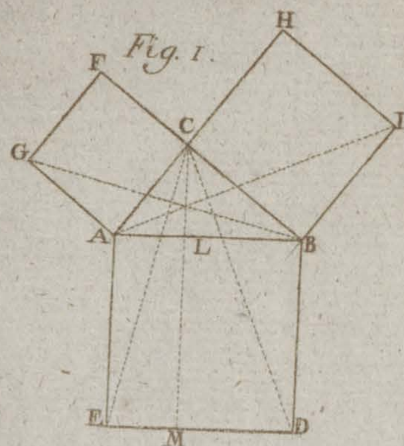
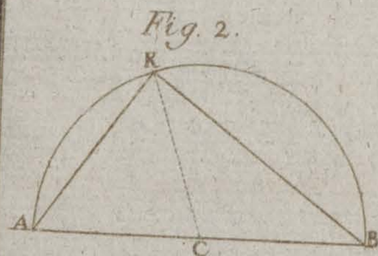
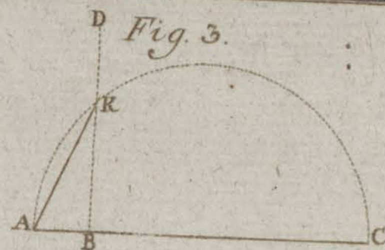


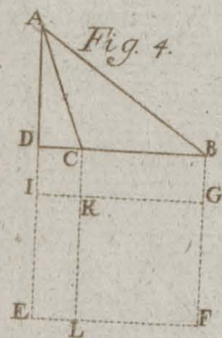
Fig. 1.
B
C
D
K
L
M
A
H
I
G
F
E
Fig. 2.
D
C
A
B
E
F
Fig. 3.
4
3
5
Fig. 4.
G
F
A
E
B
H
I
D
C

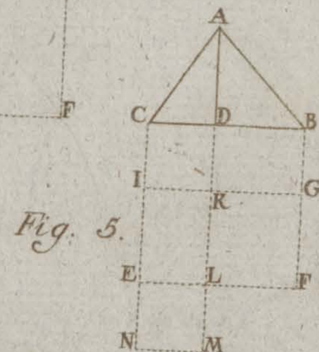
Tab. IX.


Fig. 1.
H
F
C
I
G
A
L
B
E
M
D


Fig. 2.
K
A
C
B

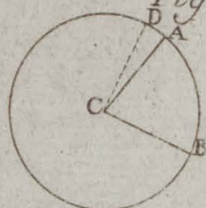

D
Fig. 3.
K
A
B
C


A
Fig. 4.
D
C
B
I
K
G
E
L
F


A
C
D
B
I
K
G
Fig. 5.
E
L
F
N
M

Tab. I.

Fig. 1.



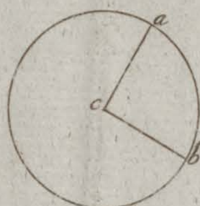




Fig. 2.

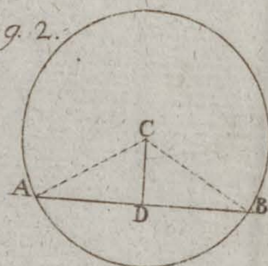



Fig. 3.

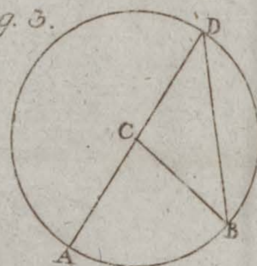



Fig. 4.

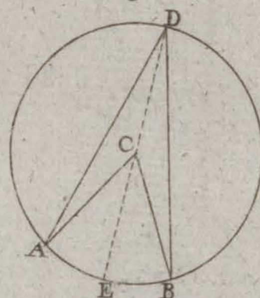



Fig. 5.

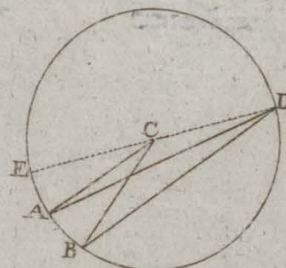
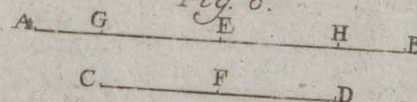
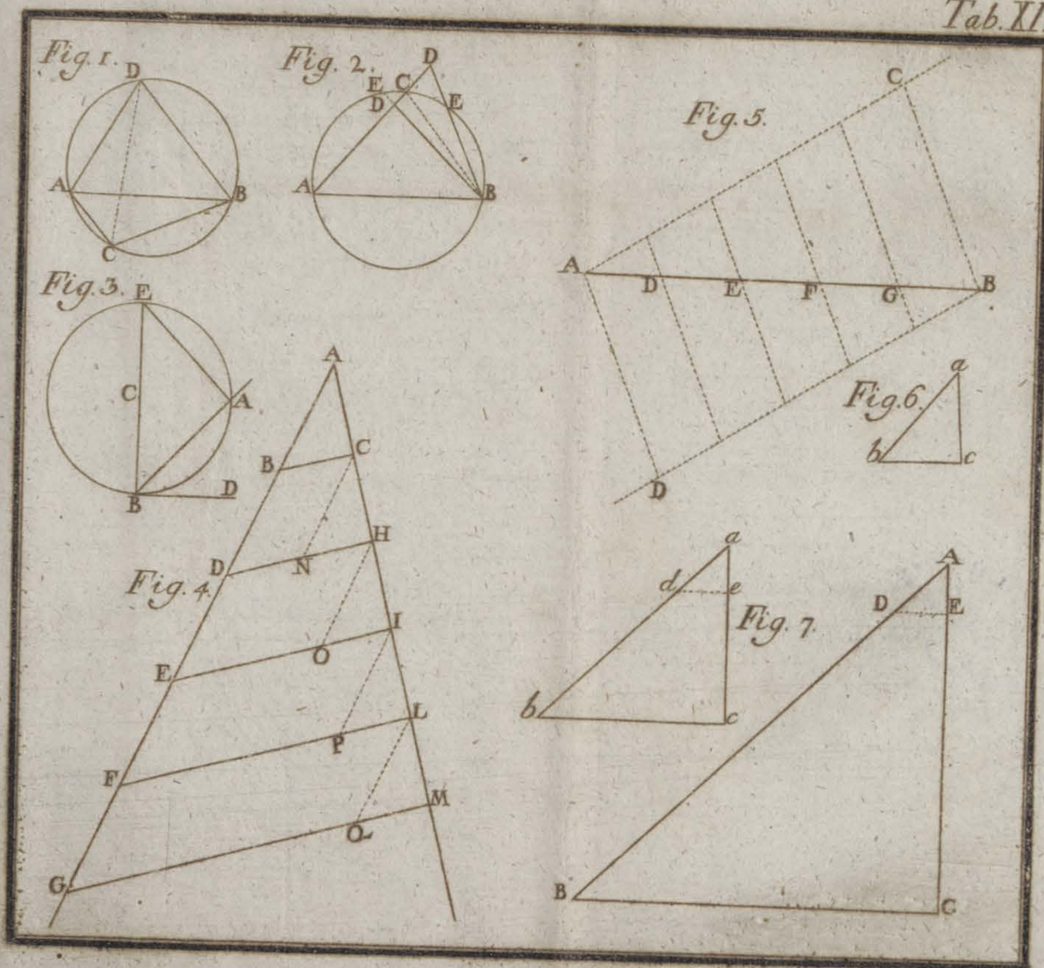
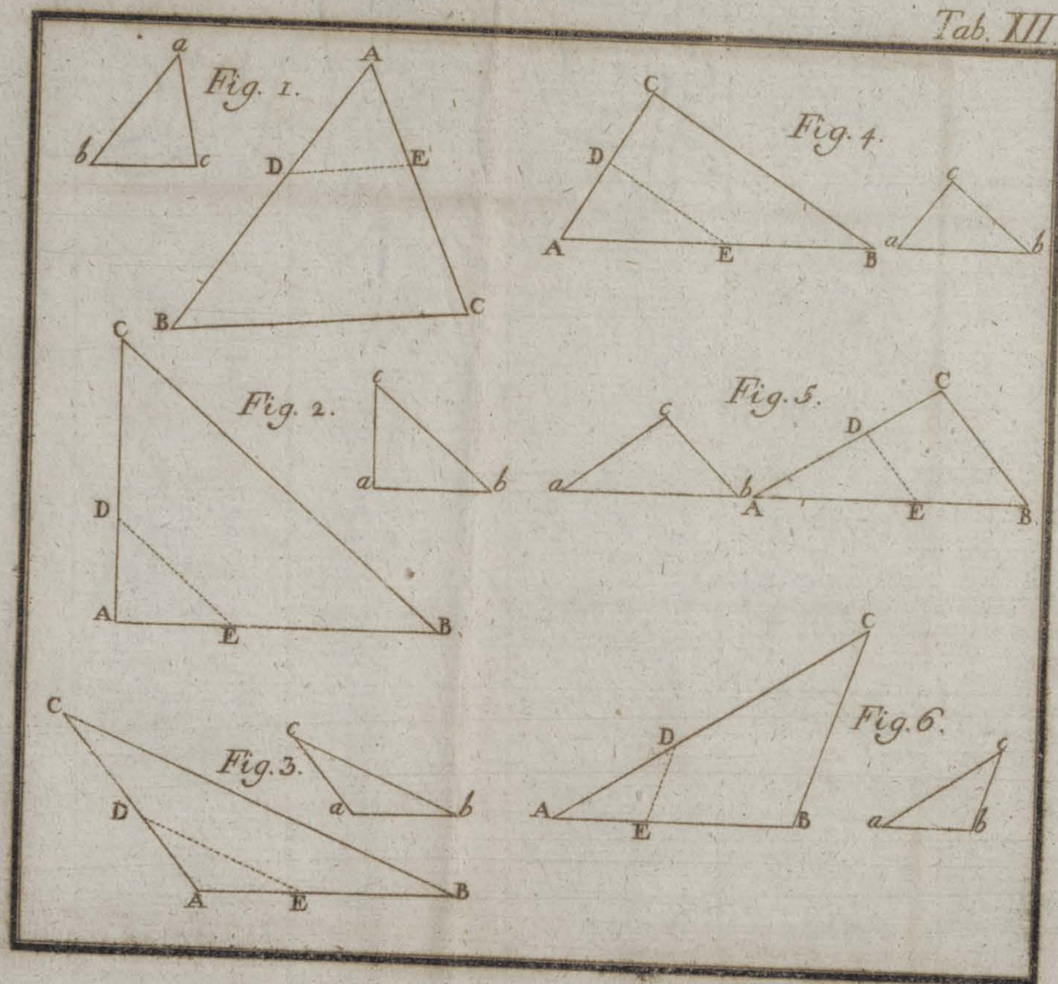



Fig. 6.




Tab. XI.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.


Tab. XII.
Fig. 1.
a
b
c
A
D
E
B
C
Fig. 2.
C
D
A
E
B
c
a
b
Fig. 3.
C
D
A
E
B
c
a
b
Fig. 4.
C
D
A
E
B
c
a
b
Fig. 5.
c
a
b
C
D
A
E
B
Fig. 6.
C
D
A
E
B
c
a
b

Tab. XIII.

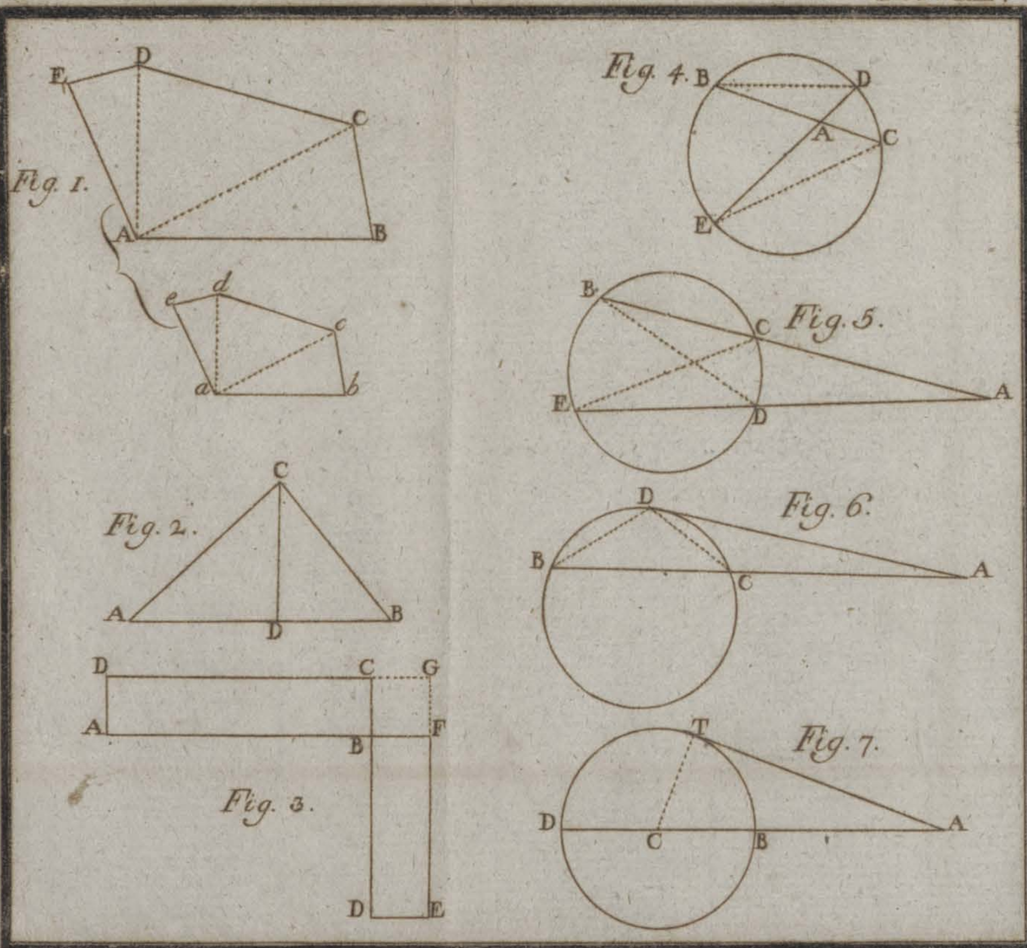
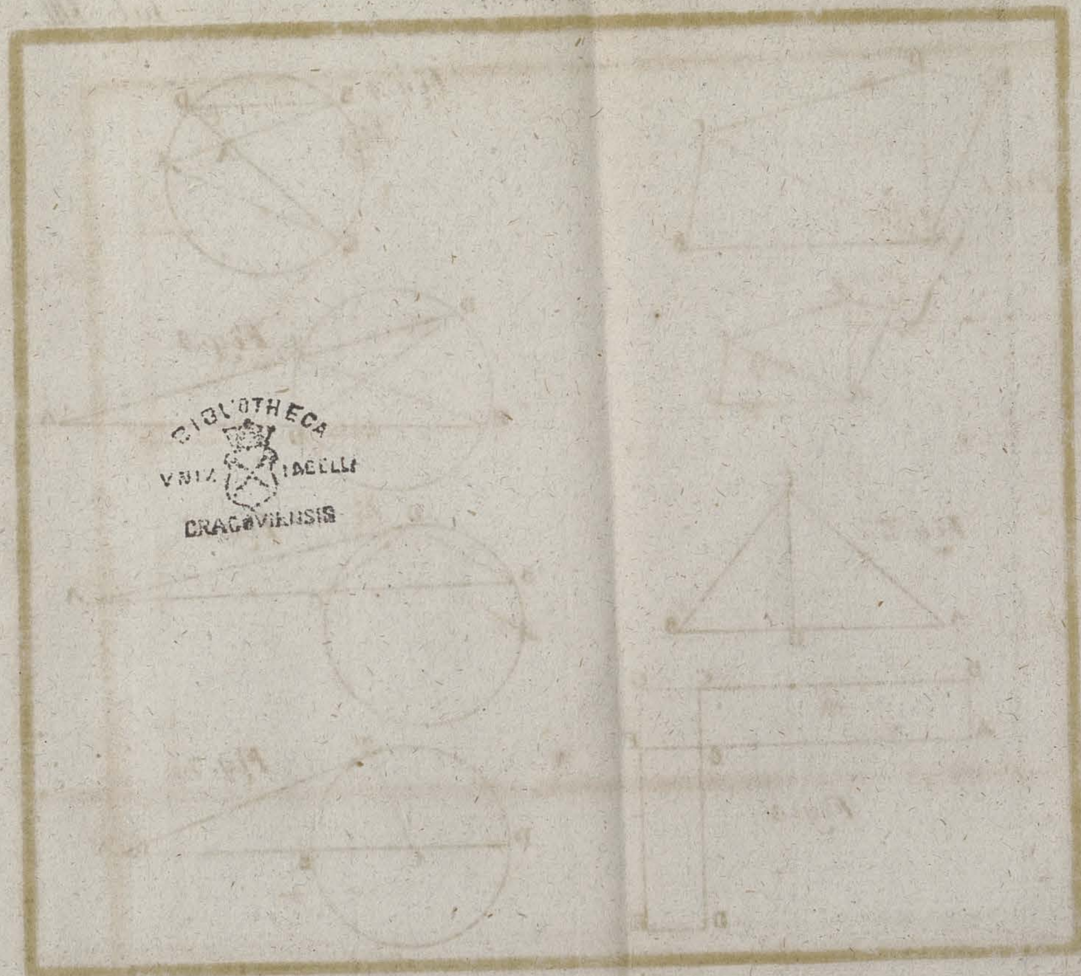


Fig. 1.
E
D
C
A
B
e
d
c
a
b
Fig. 2.
C
A
D
B
D
C
G
A
B
F
Fig. 3.
D
E
Fig. 4.
B
D
A
C
E
B
C
Fig. 5.
E
D
A
D
Fig. 6.
B
C
A
T
Fig. 7.
D
C
B
A



Tab. III.



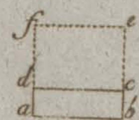
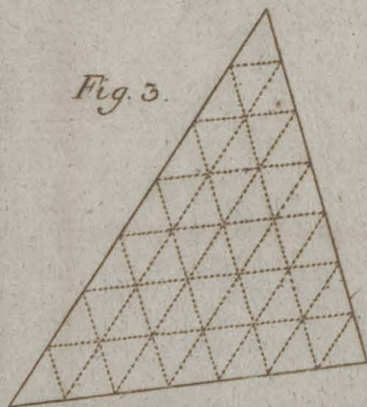


Fig. 1.



Fig. 2.


Fig. 3.

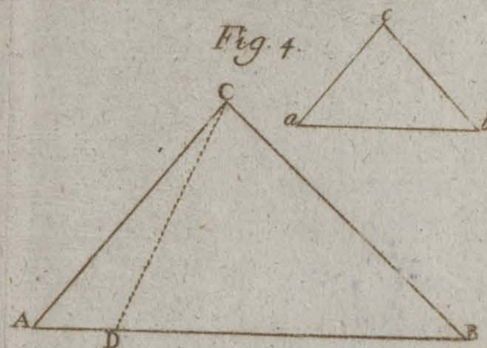
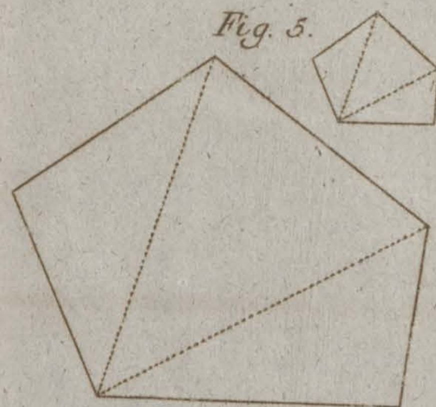
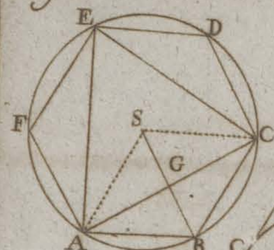
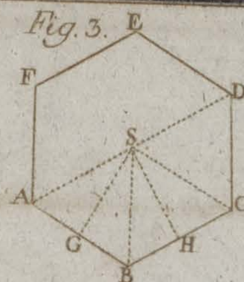


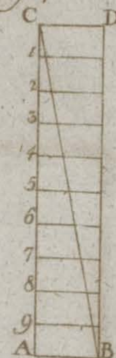
Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 1.
E
D
F
S
C
G
A
B


F
C
B
Fig. 2.
S
D
A
E


Fig. 3.
E
F
D
S
A
C
G
H
B


Fig. 4
C
D
1
2
3
4
5
6
7
8
9
A
B

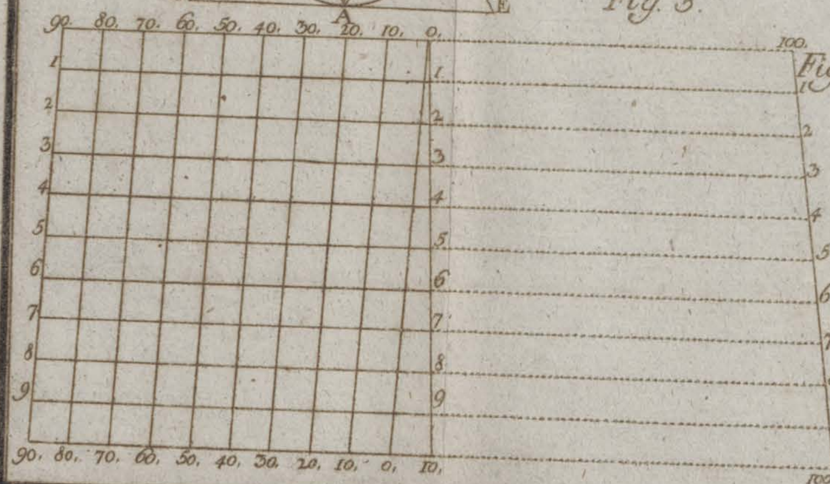
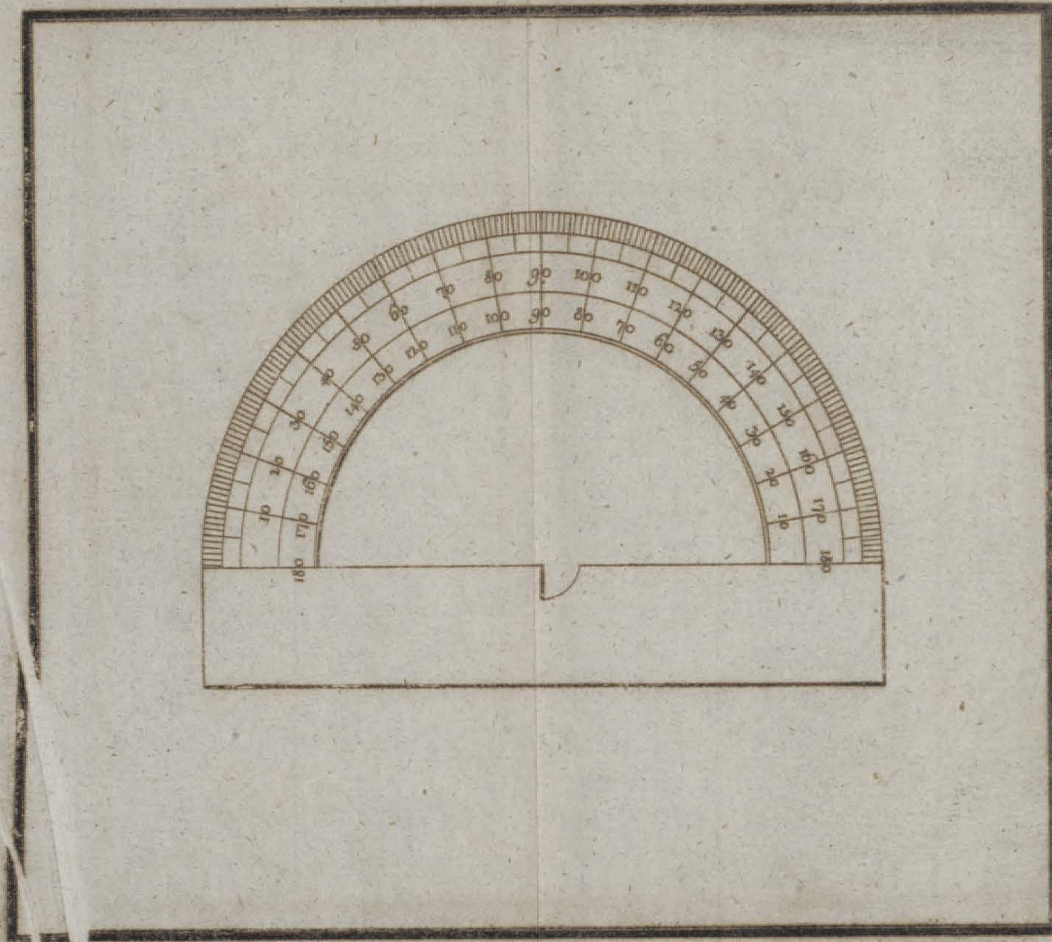
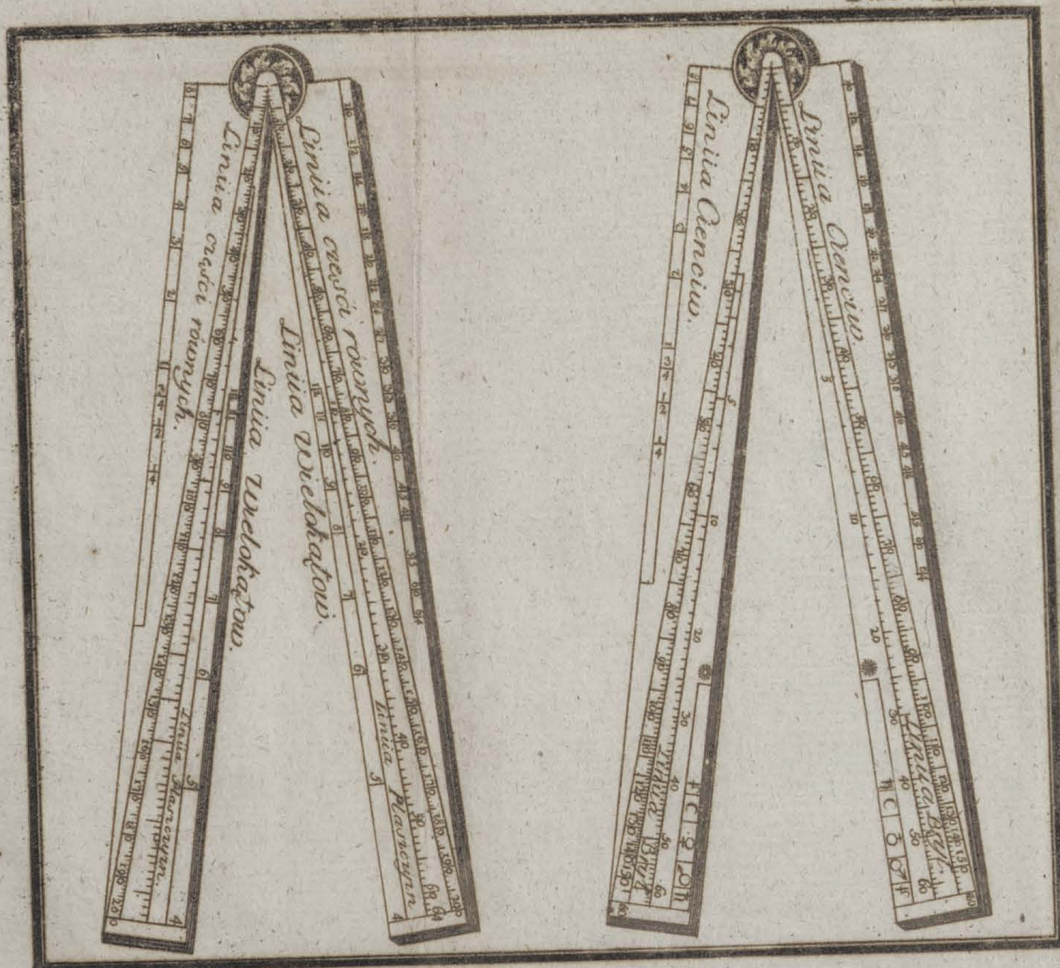

Fig. 5.
90. 80. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. 0.
100.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
90. 80. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. 0. 10.
100


Fig. 6.

Tab. XVI



Tab. XVII.


Liniia części równych.
Liniia Wielokątow.
Liniia Wielokątow.
Liniia Płaszczyzn.
Liniia Płaszczyzn.
Liniia Cięciw.
Liniia Cięciw.

Tab. XVIII.

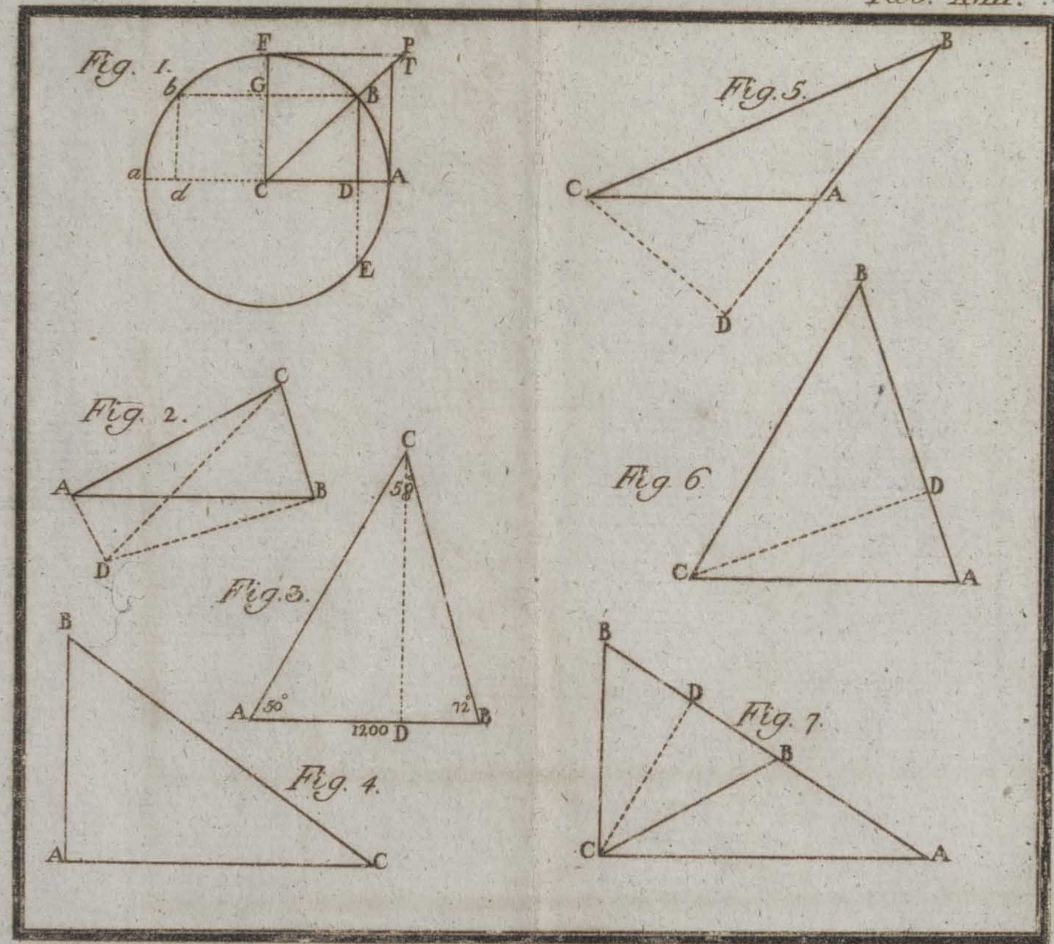
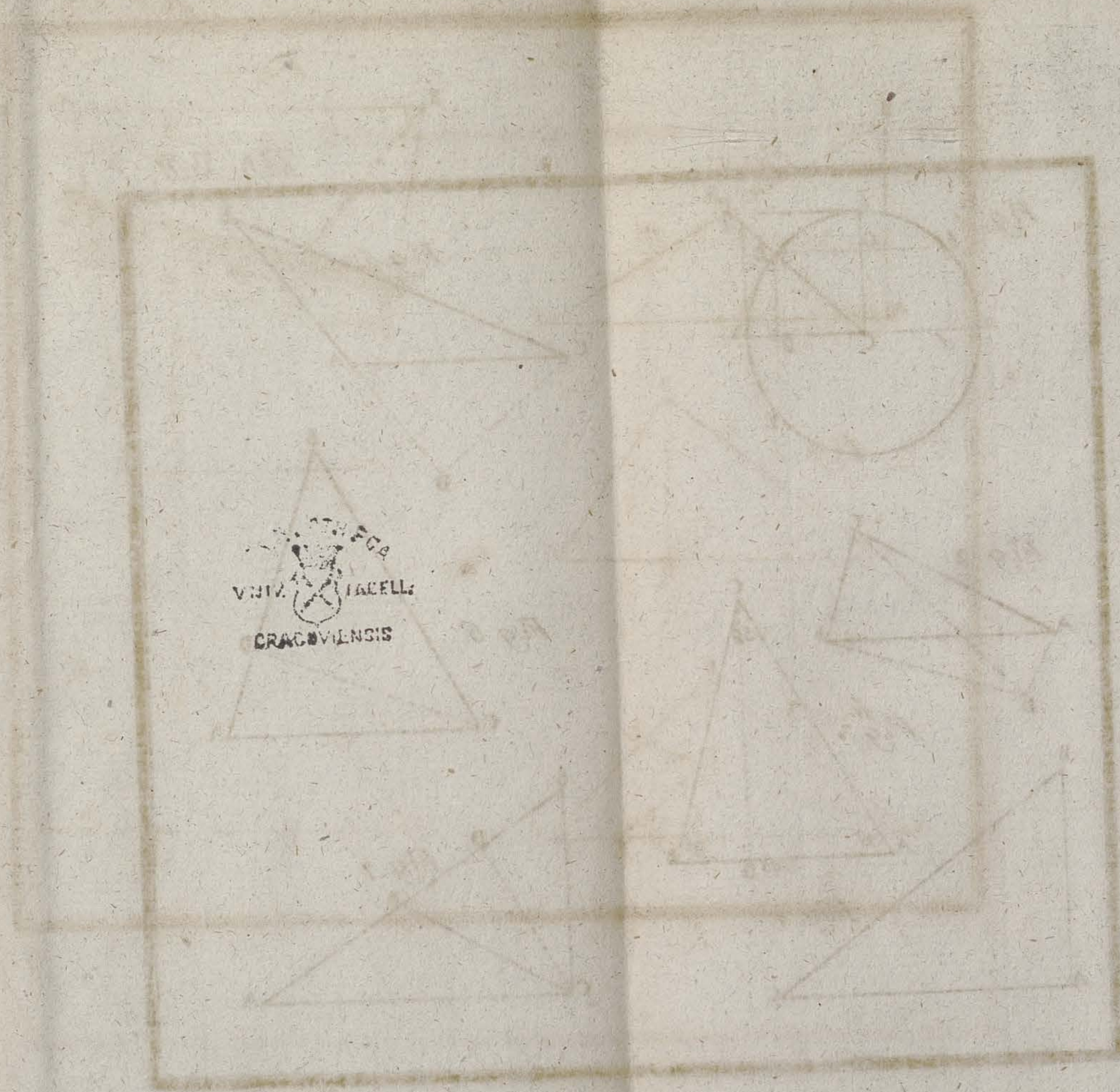
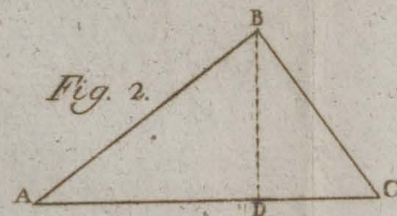
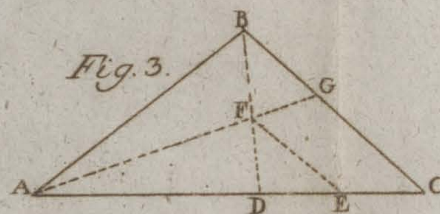


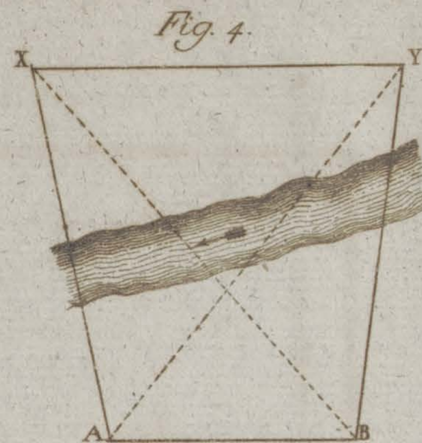
Fig. 1.
F
P
T
b
G
B
a
d
C
D
A
E
Fig. 2.
C
A
B
D
Fig. 3.
C
58
A
50°
72
B
1200
D
Fig. 4.
B
A
C
Fig. 5.
B
C
A
D
Fig. 6.
B
D
C
A
Fig. 7.
B
D
B
C
A



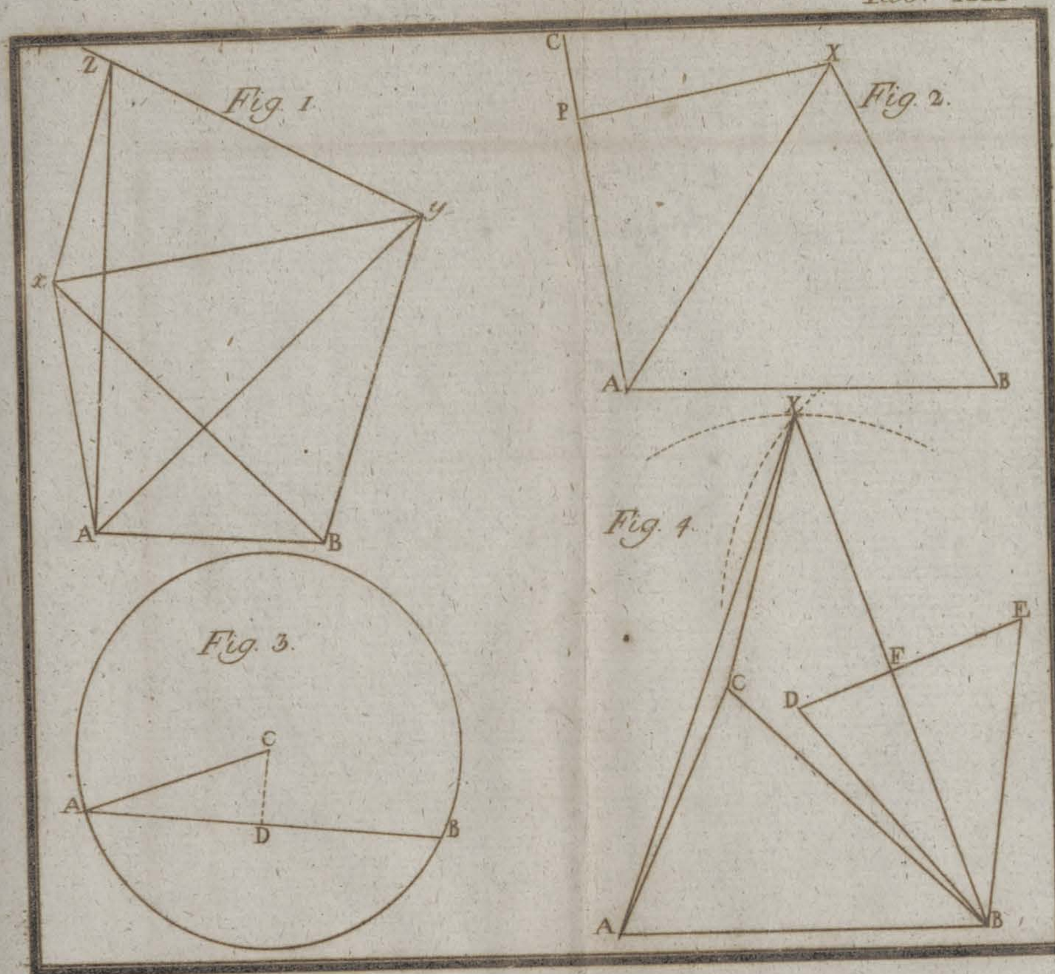

B
Fig. 1.
A
C


B
Fig. 2.
A
D
C

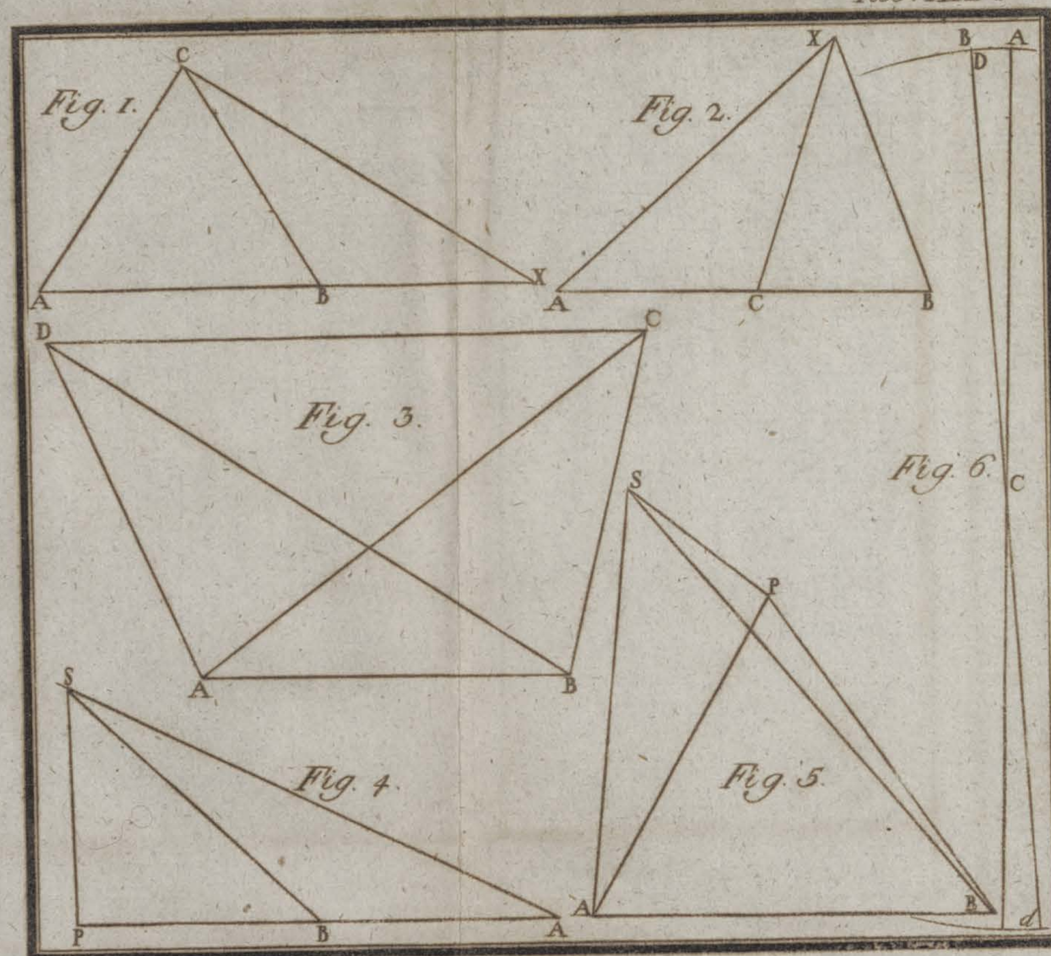

B
Fig. 3.
G
F
A
D
E
C


Fig. 4.
X
Y
A
B


E
C
Fig. 5.
F
B
D
G
A


Fig. 1
Z
x
y
A
B
Fig. 2
C
P
X
A
B
Fig. 3
C
A
D
B
Fig. 4
X
C
D
F
E
A
B

Tab. XXI.



Tab. XXII.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.




...ta quantitatem Taxy, ... quantitatem solucyi, tu niżey w Instrukta-
...rzu teraźnieyszym naznaczoney (oprocz *necessariorum* z Gdańska
dla Szlachty, y Duchownych) iako niżey osobną *explicatur* excepcya.

rzu teraźnieyszym naznaczoney (oprocz *necessariorum* z Gdańska dla Szlachty, y Duchownych) iako niżey osobną *explicatur* excepcyą.

## Excepcya od Cła Generalnego. wyżey namieniona.

POd to Cło Generalne nie maią podpadać zboża *omnis generis*, y wszelkie *victualia*, iako to mąki, leguminy, Chlęby, nabiały, y drob folwarczny &c. na Targi, na własną potrzebę *in Regno* prowadzone, także wszystkie własności Szlacheckie, Duchowne, y Ich poddanych (iako się wyżey namieniło,) *in Regno* zprzedawane, iako też woły, konie, podiezdki robocze, krowy &c. na swoię potrzebę między ludźmi Krajowemi kupowane. Tudzież rożne *necessaria* z Gdańska wyprowadzone, ktore powinien każdy Szyper czyli Kommissant według Prawa przy Auszczugu lub *attestatum* ręką Pańską podpisanym, y Pieczęcią stwierdzonym zaprzysiąc, *juxta Rotham* w Instruktarzu *descriptam*, iako te nie na zprzedaż, ani na żaden handel pod iakimkolwiek pretextem sprowadza, ale na własną potrzebę Pańską; Cokolwiekby zaś nad podpisany ręką Pańską Auszczug, czyli *attestatum*, po-